Politechnika Łódzka
Instytut Fizyki

Laboratorium elektroniki

Ćwiczenie E05IS

Filtry pasywne

Wersja 2.2 (16 kwietnia 2019r.)

Spis treści:

Przed zapoznaniem się z instrukcją i przystąpieniem do wykonywania ćwiczenia należy opanować następujący materiał teoretyczny:

1. Bierne elementy elektroniczne [1-3].
2. Dzielnik napięcia [1,2,4].
3. Obwody RC, LC i RLC [1,5,6].

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wykonanie i analiza charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych i fazowo-częstotliwościowych następujących filtrów pasywnych:

1) filtra dolnoprzepustowego RC i LC,
2) filtra górnoprzepustowego RC i LC,
3) filtra Wiena RC i LC.

2. Zagrożenia

Rodzaj	Brak	Małe	Średnie	Duże
zagrożenie elektryczne		+		
zagrożenie optyczne	+			
zagrożenie mechaniczne (w tym akustyczne, hałas)	+			
zagrożenie polem elektro-magnetycznym (poza widmem optycznym)	+			
zagrożenie biologiczne	+			
zagrożenie radioaktywne (jonizujące)	+			
zagrożenie chemiczne	+			
zagrożenie termiczne (w tym wybuch i pożar)	+			

Przewody z wtykami bananowymi są przeznaczone wyłącznie do użytku w obwodach niskiego napięcia – nie wolno podłączać ich do gniazda sieci zasilającej 230 V.

3. Wprowadzenie teoretyczne

3.1. Elementy R, L, C w obwodach prądu sinusoidalnie zmiennego

Każdy wektor na płaszczyźnie zespolonej można przedstawić w postaci liczby zespolonej. Niezależnie od znaczenia fizycznego wielkości zespolone będziemy zapisywali przy użyciu symboli podkreślonych, np.:

$$\underline{A} = \mathrm{Re}(\underline{A}) + j\,\mathrm{Im}(\underline{A}) = A\exp(j\alpha) = A(\cos\alpha + j\sin\alpha)\,, \tag{1}$$

gdzie A jest modułem liczby zespolonej $\underline{A}$, $j = \sqrt{-1}$ jest jednością urojoną, $\mathrm{Re}(\underline{A})$ i $\mathrm{Im}(\underline{A})$ są rzutami wektora $\underline{A}$ odpowiednio na oś liczb rzeczywistych i urojonych, zaś α jest argumentem liczby zespolonej.

W obwodach prądu zmiennego przebiegi prądu mogą być przesunięte w fazie względem przebiegów napięcia. Zależności pomiędzy takimi wielkościami można łatwo wyrazić w postaci prawa Ohma zapisanego w dziedzinie liczb zespolonych

$$\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I} \quad \text{lub} \quad \underline{I} = \underline{Y}\,\underline{U}\,, \tag{2}$$

gdzie $\underline{U}$ oraz $\underline{I}$ reprezentują zespolone napięcie oraz zespolony prąd, $\underline{Z}$ jest zespoloną impedancją i ma wymiar oporu elektrycznego [Ω], zaś $\underline{Y}$ jest zespoloną admitancją i ma wymiar przewodności [S] (simens). Korzystając ze wzorów (1) wielkość zespolona $\underline{Z}$ może być wyrażona w następujących postaciach

$$\underline{Z} = R + j\,X \quad \text{lub} \quad \underline{Z} = Z\,\exp(j\phi)\,, \tag{3}$$

gdzie: moduł impedancji $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ jest zwany zawadą,

$\phi = \mathrm{tg}(X/R)$ jest kątem przesunięcia fazy zmian napięcia względem zmian prądu,

$R = \mathrm{Re}(\underline{Z}) = Z\cos\phi$ jest rezystancją,

$X = \mathrm{Im}(\underline{Z}) = Z\sin\phi$ jest reaktancją lub oporem pozornym (nie wydziela ciepła).

Analogicznie zespolona admitancja

$$\underline{Y} = G + j\,B \quad \text{lub} \quad \underline{Y} = Y\,\exp(j\phi')\,, \tag{4}$$

gdzie: $Y = \sqrt{G^2 + B^2}$ jest modułem admitancji,

$\phi' = \mathrm{tg}(B/G)$,

$G = \mathrm{Re}(\underline{Y}) = Y\cos\phi'$ jest konduktancją,

$B = \mathrm{Im}(\underline{Y}) = Y\sin\phi'$ jest susceptancją.

Między impedancją a admitancją zachodzą zależności:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{G - jB}{Y^2}\,, \qquad \phi = -\phi'\,. \tag{5}$$

Jeżeli do zacisków idealnej cewki o indukcyjności L [H] przyłożymy sinusoidalnie zmienne napięcie o częstotliwości f, to zmiany napięcia będą wyprzedzać zmiany prądu o kąt $\phi = \pi/2$ i reaktancja cewki wyniesie

$$X_L = 2\pi f L\,. \tag{6}$$

W przypadku idealnego kondensatora o pojemności C [F] reaktancja wyniesie

$$X_C = -\frac{1}{2\pi f C}\,, \tag{7}$$

przy czym zazwyczaj przyjmuje się ujemny znak X_C wynikający z ujemnej wartości kąta fazowego $\phi = -\pi/2$.

Reaktancja szeregowo połączonej cewki oraz kondensatora może być obliczona jako suma reaktancji składowych $X = X_L + X_C$. W przypadku ogólnym zespolona impedancja zastępcza układu n szeregowo połączonych dowolnych impedancji składowych wynosi

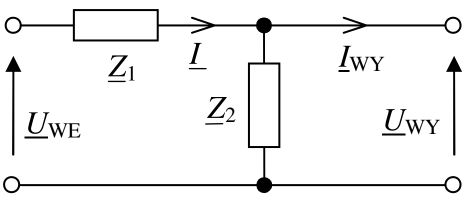
$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \ldots + \underline{Z}_n\,. \tag{8}$$

W przypadku równoległego połączenia elementów wygodniej jest posługiwać się pojęciem admitancji. Zespolona admitancja zastępcza układu n równolegle połączonych admitancji składowych jest równa sumie tych admitancji

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \ldots + \underline{Y}_n\,. \tag{9}$$

3.2. Dzielnik napięcia w obwodzie prądu sinusoidalnie zmiennego

Wszystkie układy badane w tym ćwiczeniu mają strukturę dzielnika napięcia przedstawioną na rys. 1, przy czym elementy składowe w ogólnym przypadku są opisane zespolonymi impedancjami $\underline{Z}_1$ i $\underline{Z}_2$.



Rys. 1. Schemat dzielnika napięcia.

Jeżeli prąd I_{WY} płynący w obwodzie wyjściowym dzielnika jest pomijalnie mały, to przez elementy $\underline{Z}_1$ i $\underline{Z}_2$ przepływa ten sam prąd $\underline{I}$. Prawo Ohma (2) zapisane dla samej impedancji $\underline{Z}_2$ oraz dla szeregowego połączenia $\underline{Z}_1$ i $\underline{Z}_2$ przyjmuje wówczas postać

$$\underline{U}_{WY} = \underline{Z}_2\, \underline{I}\,, \tag{10}$$

$$\underline{U}_{WE} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)\, \underline{I}\,. \tag{11}$$

Stąd, eliminując prąd $\underline{I}$ otrzymujemy

$$\frac{\underline{U}_{WY}}{\underline{U}_{WE}} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\,. \tag{12}$$

Ponieważ (12) jest związkiem wielkości zespolonych, wygodniej będzie analizować osobno jego część rzeczywistą opisującą stosunek łatwych do pomiaru amplitud (lub wartości skutecznych) napięć

$$\frac{U_{WY}}{U_{WE}} = \left|\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\right|. \tag{13}$$

Ponadto, jeżeli sinusoidalnie zmienne napięcia zespolone wyrazimy w postaci

$$\underline{U}_{WE} = U_{WE} \exp[j(\omega t + \varphi_{WE})] \quad \text{oraz} \quad \underline{U}_{WY} = U_{WY} \exp[j(\omega t + \varphi_{WY})]\,, \tag{14}$$

to przesunięcie fazy napięcia mierzone pomiędzy wyjściem i wejściem dzielnika $\varphi = \varphi_{WY} - \varphi_{WE}$ może być obliczone jako

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}\left(\underline{U}_{WY}/\underline{U}_{WE}\right)}{\operatorname{Re}\left(\underline{U}_{WY}/\underline{U}_{WE}\right)}\,. \tag{15}$$

W przypadku filtrów LC zakres zmian φ wykracza poza przedział $-\pi/2 \div +\pi/2$ opisany przez funkcję arcus tangens i wówczas należy wykorzystać wzór

$$\varphi = \frac{\operatorname{Im}\left(\underline{U}_{WY}/\underline{U}_{WE}\right)}{\left|\operatorname{Im}\left(\underline{U}_{WY}/\underline{U}_{WE}\right)\right|} \arccos\frac{\operatorname{Re}\left(\underline{U}_{WY}/\underline{U}_{WE}\right)}{\left|\underline{U}_{WY}/\underline{U}_{WE}\right|}\,. \tag{16}$$

3.3. Filtry

Filtrem częstotliwości nazywamy układ o strukturze czwórnika (czwórnik to układ mający cztery zaciski - jedna z par zacisków pełni rolę wejścia, zaś druga wyjścia), który „przepuszcza" sygnały w określonym paśmie częstotliwości, a tłumi sygnały leżące poza tym pasmem. Filtry częstotliwości mają głównie zastosowanie w urządzeniach elektronicznych i energetycznych. Filtry umieszczone pomiędzy źródłem sygnału a odbiornikiem powodują, że do odbiornika dostaje się sygnał o pożądanym widmie częstotliwości, co oznacza, że sygnały niepożądane są eliminowane.

Pasmo częstotliwości, w którym filtr przepuszcza sygnały z małym tłumieniem nosi nazwę pasma przepustowego, zaś pasmo, w którym sygnały podlegają silnemu tłumieniu nosi nazwę pasma zaporowego. Częstotliwość, która stanowi granicę pomiędzy pasmem przepustowym a pasmem zaporowym, nazywana jest częstotliwością graniczną. Filtr może mieć kilka częstotliwości granicznych. W zależności od położenia pasma przepustowego wyróżnia się następujące filtry:

- dolnoprzepustowe - pasmo przepustowe od częstotliwości $f = 0$ Hz do częstotliwości granicznej f_g,
- górnoprzepustowe - pasmo przepustowe od częstotliwości granicznej f_g do nieskończoności,
- środkowoprzepustowe (pasmowe) - pasmo przepustowe od dolnej częstotliwości granicznej f_{g1} do górnej częstotliwości granicznej f_{g2},
- środkowozaporowe (zaporowe) - pasmo zaporowe w przedziale częstotliwości od f_{g1} do f_{g2}.

W zależności od elementów wykorzystanych do budowy filtrów wyróżnia się:

- filtry pasywne - zbudowane z samych elementów pasywnych:
  – filtry bezindukcyjne (RC) - zbudowane z rezystorów i kondensatorów,
  – filtry reaktancyjne (LC) - zbudowane z cewek i kondensatorów,
- filtry aktywne - wykorzystują elementy aktywne (takie jak np. wzmacniacze operacyjne) i umożliwiają zaprojektowanie filtra o dowolnej charakterystyce częstotliwościowej.

Podstawowe parametry charakteryzujące pasywny filtr częstotliwości to:

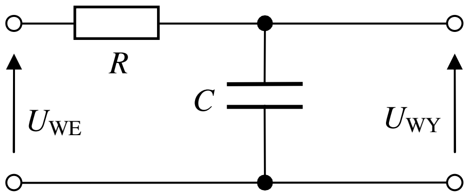
1) **współczynnik tłumienia (*k*)** - wielkość określająca, jaka część sygnału wejściowego jest przenoszona na wyjście filtra przy danej częstotliwości. Może on być określany na kilka sposobów, np. jako bezpośredni stosunek wartości napięć U_{WY}/U_{WE} lub w decybelach

$$k = -20\log\frac{U_{WY}}{U_{WE}} \text{ [dB]}, \tag{17}$$

2) **przesunięcie fazowe φ** - różnica pomiędzy fazą napięcia na wyjściu filtra i fazą napięcia na jego wejściu wyrażone w stopniach lub radianach,

3) **częstotliwość graniczna (f_g)** - wartość częstotliwości oddzielająca pasmo przepustowe od pasma zaporowego. Typowo, za częstotliwość graniczną przyjmuje się taką wartość częstotliwości, przy której tłumienie wzrasta o 3 dB w stosunku do minimum tłumienia w paśmie przepustowym (tzw. „3 decybelowa częstotliwość graniczna"). Zgodnie ze wzorem (17) wzrost tłumienia o 3 dB odpowiada zmniejszeniu się wartości stosunku U_{WY}/U_{WE} do poziomu $10^{-3/20} \approx 0{,}708$ maksymalnej wartości w paśmie przepustowym. Częstotliwość graniczna dla tłumienia 3 dB jest często utożsamiana z częstotliwością graniczną odpowiadającą zmniejszeniu się stosunku U_{WY}/U_{WE} do $1/\sqrt{2} \approx 0{,}707$ wartości maksymalnej. Częstotliwość graniczna określona w ten sposób jest łatwiejsza do obliczenia gdy znamy wartości zastosowanych w filtrze elementów RLC.

3.3.1. Filtr dolnoprzepustowy RC



Rys. 2. Schemat prostego filtra dolnoprzepustowego RC.

Równanie (12) dla układu przedstawionego na rys. 2 przyjmuje postać

$$\frac{\underline{U}_{WY}}{\underline{U}_{WE}} = \frac{-\frac{j}{2\pi fC}}{R - \frac{j}{2\pi fC}}. \tag{18}$$

Wynikający ze wzoru (18) stosunek rzeczywistych napięć opisuje charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową filtra dolnoprzepustowego RC pokazaną na rys. 3

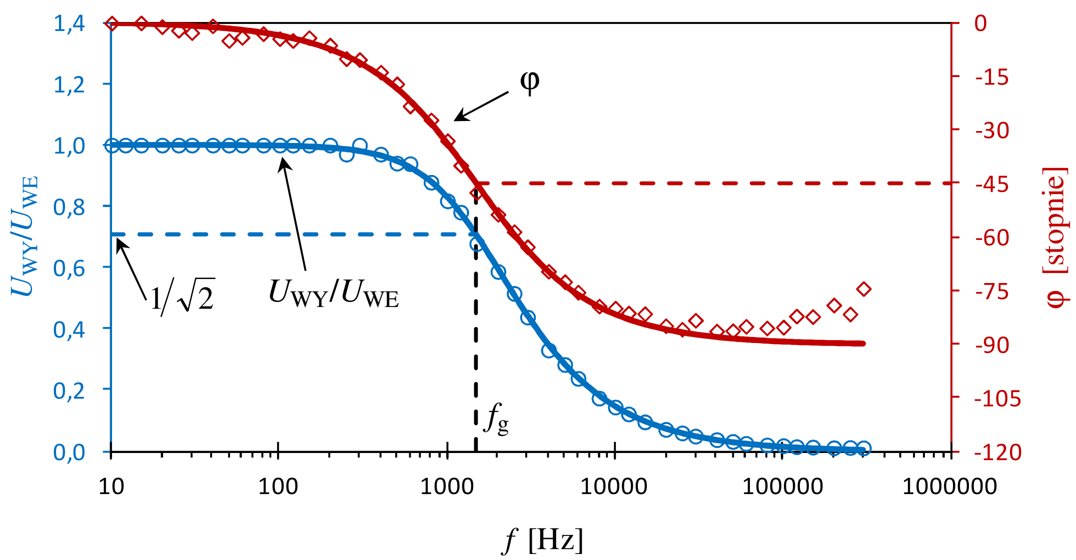
$$\frac{U_{WY}}{U_{WE}} = \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi fRC)^2}}. \tag{19}$$

Stąd częstotliwość graniczna filtra, przy której $U_{WY}/U_{WE} = 1/\sqrt{2}$

$$f_g = \frac{1}{2\pi RC}. \tag{20}$$

Charakterystykę fazowo-częstotliwościową filtra dolnoprzepustowego RC otrzymujemy podstawiając wyrażenie (18) do wzoru (15)

$$\varphi = \mathrm{arctg}(-2\pi fRC). \tag{21}$$



Rys. 3. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa i fazowo-częstotliwościowa prostego filtra dolnoprzepustowego RC. Punkty oznaczają przykładowe wyniki pomiarów a linie ciągłe zależności teoretyczne (19) i (21).

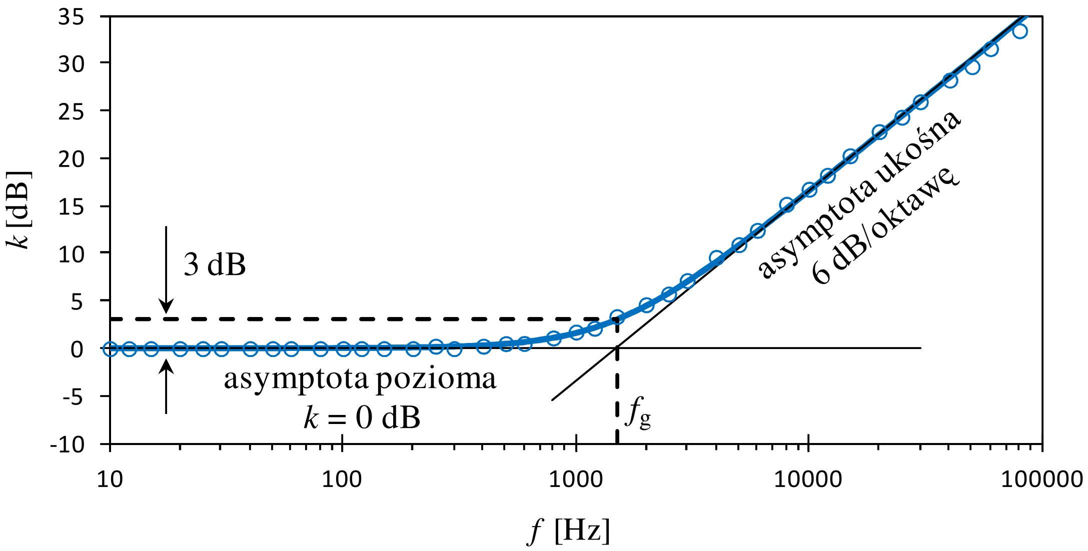
Ze wzoru (19) wynika, że wykres charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej filtra w układzie dwóch osi logarytmicznych k [dB] oraz log(f) ma dwie asymptoty:

dla $f \to 0$ asymptota pozioma $k = 0$ dB,

dla $f \to \infty$ asymptota ukośna $k = 20\log(f) - 20\log(f_g)$.

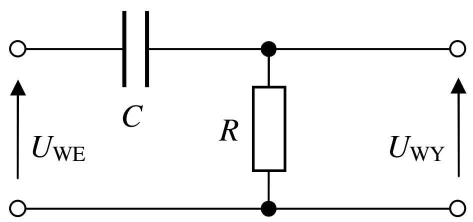
Punkt przecięcia asymptot przypada na opisaną wzorem (20) częstotliwość graniczną filtra f_g, dla której współczynnik tłumienia $k \approx 3$ dB, a współczynnik przesunięcia fazowego $\varphi = -45°$.

Nachylenie asymptoty ukośnej filtra podaje się w jednostkach dB/oktawę lub dB/dekadę. Oktawa oznacza stosunek częstotliwości 2:1 zaś dekada stosunek 10:1. Dla prostego filtra RC mamy odpowiednio 6 dB/oktawę lub 20 dB/dekadę (rys. 4).



Rys. 4. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa prostego filtra dolnoprzepustowego RC w skali logarytmicznej na obu osiach.

3.3.2. Filtr górnoprzepustowy RC



Rys. 5. Schemat prostego filtra górnoprzepustowego RC.

Równanie (12) dla układu przedstawionego na rys. 5 przyjmuje postać

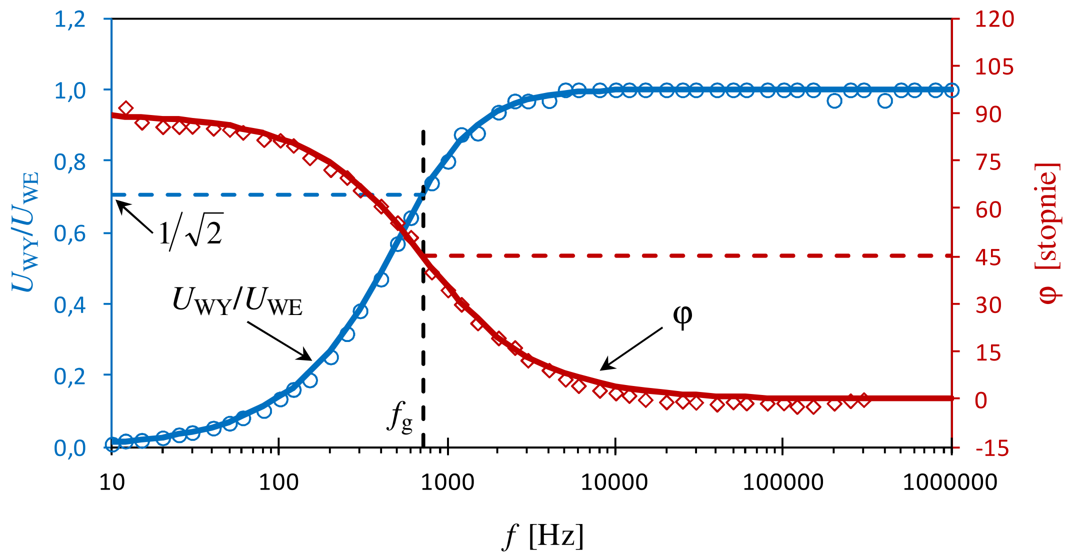
$$\frac{\underline{U}_{WY}}{\underline{U}_{WE}} = \frac{R}{R - \dfrac{j}{2\pi f C}}. \qquad (22)$$

Wynikający ze wzoru (22) stosunek rzeczywistych napięć opisuje charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową filtra górnoprzepustowego RC pokazaną na rys. 6

$$\frac{U_{WY}}{U_{WE}} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{(2\pi fRC)^2}}}. \tag{23}$$

Przesunięcie fazy otrzymujemy podstawiając wyrażenie (22) do wzoru (15)

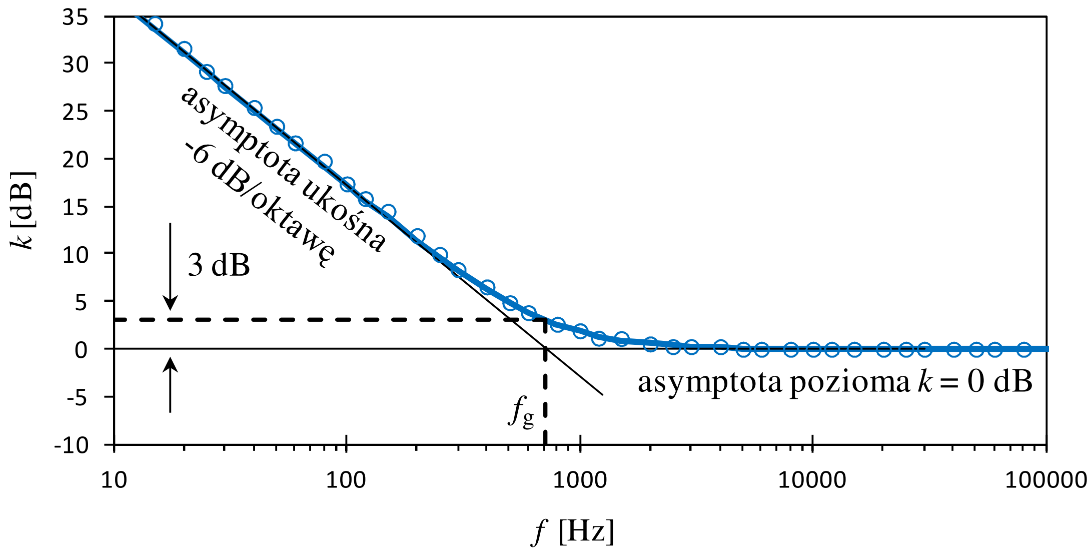
$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{2\pi fRC}. \tag{24}$$



Rys. 6. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa i fazowo-częstotliwościowa prostego filtra górnoprzepustowego RC. Punkty oznaczają przykładowe wyniki pomiarów a linie ciągłe zależności teoretyczne (23) i (24).

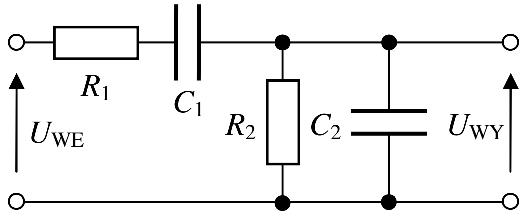
Ze wzoru (23) wynika, że wykres charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej filtra w układzie dwóch osi logarytmicznych k [dB] oraz log(f) ma dwie asymptoty (rys. 7) przecinające się w częstotliwości granicznej f_g (20):

dla $f \to 0$ asymptota ukośna $k = -20\log(f) + 20\log(f_g)$,
dla $f \to \infty$ asymptota pozioma $k = 0$ dB.



Rys. 7. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa prostego filtra górnoprzepustowego RC w skali logarytmicznej na obu osiach.

3.3.3. Filtr Wiena RC



Rys. 8. Schemat filtra Wiena RC.

Równanie (12) dla układu przedstawionego na rys. 8 przyjmuje postać

$$\frac{\underline{U}_{WY}}{\underline{U}_{WE}} = \frac{\left(R_2^{-1} + j2\pi f C_2\right)^{-1}}{R_1 - \dfrac{j}{2\pi f C_1} + \left(R_2^{-1} + j2\pi f C_2\right)^{-1}}. \tag{25}$$

Stąd pokazany na rys. 9 stosunek rzeczywistego napięcia wyjściowego do napięcia wejściowego

$$\frac{U_{WY}}{U_{WE}} = \left[\left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} + 1\right)^2 + \left(2\pi f R_1 C_2 - \frac{1}{2\pi f R_2 C_1}\right)^2\right]^{-1/2} \tag{26}$$

oraz przesunięcie fazy napięć wprowadzane przez filtr

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\dfrac{1}{2\pi f R_2 C_1} - 2\pi f R_1 C_2}{\dfrac{R_1}{R_2} + \dfrac{C_2}{C_1} + 1}. \tag{27}$$

Na podstawie wzoru (26) można wykazać, że omawiany układ jest filtrem środkowoprzepustowym i maksimum jego charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej przypada na tzw. częstotliwość środkową

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \tag{28}$$

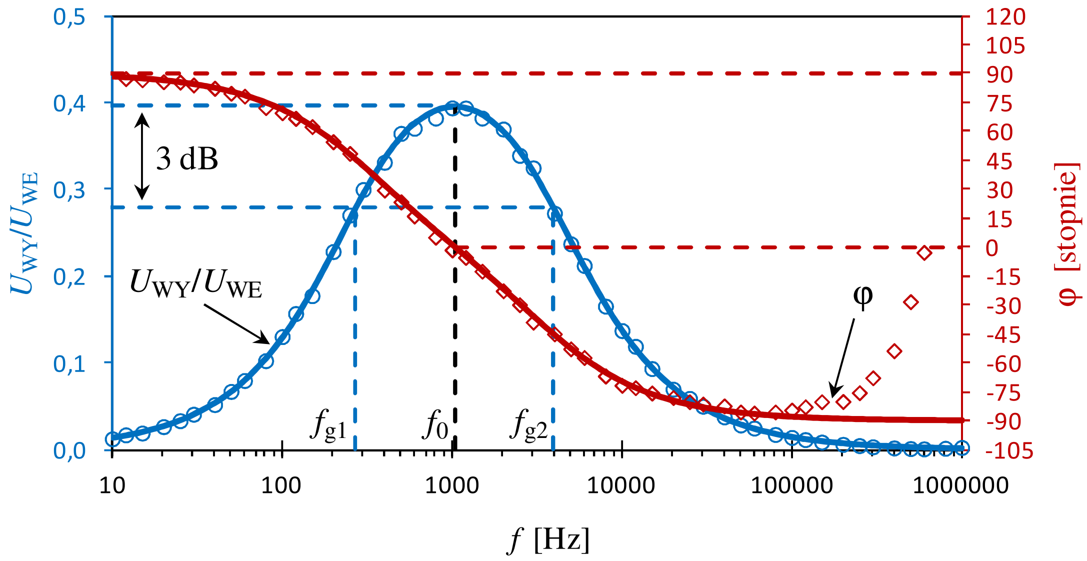
a wartość tego maksimum wynosi

$$\left(\frac{U_{WY}}{U_{WE}}\right)_{max} = \left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} + 1\right)^{-1}. \tag{29}$$

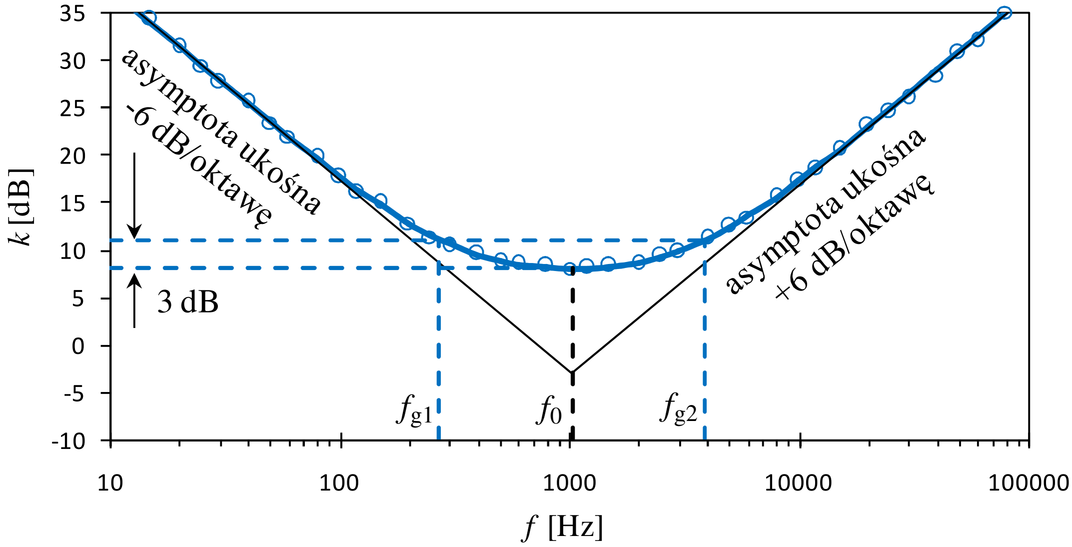
Ze wzoru (26) wynika również, że wykres charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej filtra Wiena RC w układzie dwóch osi logarytmicznych k [dB] oraz $\log(f)$ ma dwie asymptoty ukośne (rys. 10) przecinające się w punkcie odpowiadającym częstotliwości f_0 (28):

dla $f \to 0$ asymptota ukośna $\quad k = -\,20 \log(f) - 20 \log(2\pi R_2 C_1)$,
dla $f \to \infty$ asymptota ukośna $\quad k = +\,20 \log(f) + 20 \log(2\pi R_1 C_2)$.

Charakterystyka fazowo-częstotliwościowa dana wzorem (27) przebiega od wartości +90° dla $f \to 0$, poprzez 0° dla częstotliwości f_0 i dąży do –90° dla $f \to \infty$ (rys. 9).



Rys. 9. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa i fazowo-częstotliwościowa filtra Wiena RC. Punkty oznaczają przykładowe wyniki pomiarów a linie ciągłe zależności teoretyczne (26) i (27).



Rys. 10. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa filtra Wiena RC w skali logarytmicznej na obu osiach.

Dobroć filtra Q określa się jako stosunek jego częstotliwości środkowej f_0 do szerokości jego pasma

$$Q = \frac{f_0}{f_{g2} - f_{g1}}, \tag{30}$$

gdzie f_{g1} oraz f_{g2} są dolną i górną częstotliwością graniczną, przy których iloraz napięć U_{WY}/U_{WE} opada do poziomu $1/\sqrt{2}$ wartości maksymalnej (patrz wzór 29), co odpowiada wzrostowi współczynnika tłumienia k o około 3 dB względem jego minimum. Wykorzystując wzory (26) i (29) można wykazać, że dobroć (30) omawianego filtra wynosi

$$Q=\sqrt{\frac{R_1C_2}{R_2C_1}}\left(\frac{R_1}{R_2}+\frac{C_2}{C_1}+1\right)^{-1}=\frac{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}{R_1C_1+R_2C_2+R_2C_1}. \tag{31}$$

Zakres wartości Q możliwych do otrzymania ze wzoru (31) jest ograniczony do przedziału $0 \div 0{,}5$.

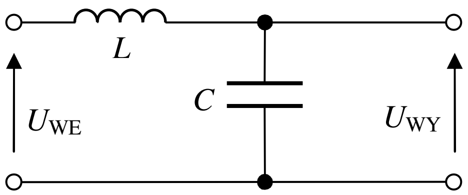
Posługując się symbolami wprowadzonymi we wzorach (28), (29) i (31) możemy teraz uprościć zapis wzoru (26) opisującego charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową oraz wzoru (27) opisującego charakterystykę fazowo-częstotliwościową

$$\frac{U_{\mathrm{WY}}}{U_{\mathrm{WE}}}=\left(\frac{U_{\mathrm{WY}}}{U_{\mathrm{WE}}}\right)_{\max}\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(f/f_0-f_0/f\right)^2}}, \tag{32}$$

$$\varphi=\mathrm{arctg}\left[Q\left(f_0/f-f/f_0\right)\right]. \tag{33}$$

3.3.4. Filtr dolnoprzepustowy LC

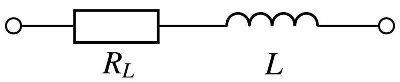
Schemat prostego filtra dolnoprzepustowego LC przedstawiono na rys. 11.



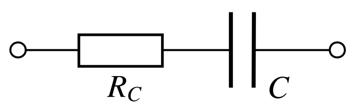
Rys. 11. Schemat prostego filtra dolnoprzepustowego LC.

<u>Rezonans w obwodzie wejściowym filtra</u>

W typowej rzeczywistej cewce występują znaczące straty energii spowodowane rezystancją szeregową cewki R_L. Uwzględnienie tego faktu ma zasadnicze znaczenie dla poprawnego modelowania charakterystyk rozważanego układu w pobliżu jego częstotliwości rezonansowej. W zakresie niskich częstotliwości (od 0 do częstotliwości rezonansowej) kondensator rzeczywisty możemy jeszcze z dobrym przybliżeniem rozważać jako kondensator idealny, natomiast w zakresie wysokich częstotliwości (powyżej częstotliwości rezonansowej) znaczenia nabiera rezystancja szeregowa kondensatora.



Rys. 12. Schemat zastępczy cewki rzeczywistej.



Rys. 13. Schemat zastępczy kondensatora rzeczywistego.

Przyjmując schematy zastępcze cewki i kondensatora przedstawione na rys. 12 i 13 impedancję wejściową filtra możemy zapisać jako

$$\underline{Z}_{\mathrm{WE}}=\underline{Z}_1+\underline{Z}_2=R_L+R_C+j\left(2\pi fL-\frac{1}{2\pi fC}\right) \tag{34}$$

a zespolony prąd płynący przez tę impedancję

$$\underline{I} = \underline{U}_{\mathrm{WE}} / \underline{Z}_{\mathrm{WE}} . \tag{35}$$

Gdy częstotliwość *f* jest równa częstotliwości rezonansowej

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} , \tag{36}$$

i obciążenie wyjścia filtra jest pomijalnie małe, to reaktancje elementów *L* i *C* kompensują się a prąd w obwodzie $I_0 = U_{\mathrm{WE}}/R$ osiąga wartość maksymalną ograniczoną tylko przez rezystancję szeregową $R = R_L + R_C$. Ten sam prąd płynie także przez elementy *L* i *C*, zatem $I_0 = U_C / X_C = U_L / X_L$. Gdy rezystancja *R* jest niewielka, to napięcia na pojemności U_C i indukcyjności U_L mogą być nawet wielokrotnie większe od napięcia zasilającego U_{WE}. Stosunek tych napięć w rezonansie nazywa się *dobrocią obwodu RLC*

$$Q = \frac{U_L}{U_{\mathrm{WE}}} = \frac{U_C}{U_{\mathrm{WE}}} \tag{37}$$

lub

$$Q = \frac{2\pi f_0 L}{R} = \frac{1}{2\pi f_0 RC} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} . \tag{38}$$

Jeżeli niezależnie od obciążenia źródła $U_{\mathrm{WE}} = \mathrm{const.}$, to prąd *I* płynący przy dowolnej częstotliwości *f* wygodnie jest wyrazić jako ułamek prądu rezonansowego I_0 w postaci

$$\frac{I}{I_0} = \frac{R}{Z_{\mathrm{WE}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 (f/f_0 - f_0/f)^2}} . \tag{39}$$

Rozważając rodzinę zależności I/I_0 od f/f_0 daną wzorem (39) dla różnych wartości parametru *Q* widzimy, że wzrost wartości *Q* wiąże się ze zwiększeniem ostrości krzywej rezonansowej. Można wykazać, że dobroć zdefiniowana jako stosunek napięć (37) jest równoważna dobroci zdefiniowanej poprzednio wzorem (30), przy czym przez f_0 należy teraz rozumieć częstotliwość (36) zaś przez f_{g1} i f_{g2} częstotliwości, przy których $I/I_0 = 1/\sqrt{2}$.

W praktyce generator funkcyjny o rezystancji wyjścia 50Ω nie jest w stanie utrzymać stałego napięcia na wejściu filtra, w którym *R* jest także rzędu kilkudziesięciu omów. Jeżeli gałka regulacji amplitudy w generatorze pozostaje w ustalonej pozycji, to przy częstotliwości $f = f_0$ można zaobserwować największy spadek napięcia U_{WE}.

<u>Transmisja sygnału przez filtr dolnoprzepustowy LC</u>

Równanie (12) dla filtra przedstawionego na rys. 11 ma postać

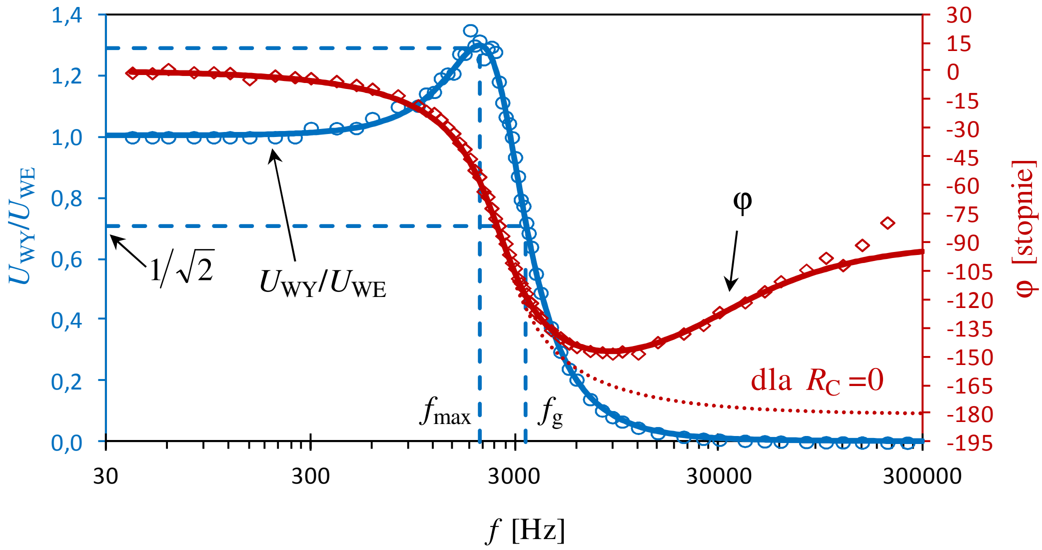
$$\frac{\underline{U}_{\mathrm{WY}}}{\underline{U}_{\mathrm{WE}}} = \frac{-\dfrac{j}{2\pi fC} + R_C}{j\left(2\pi fL - \dfrac{1}{2\pi fC}\right) + R_L + R_C} = \frac{(Qf_0/f)(-j + 2\pi f R_C C)}{jQ(f/f_0 - f_0/f) + 1} . \tag{40}$$

Stąd pokazany na rys. 14 stosunek rzeczywistego napięcia wyjściowego do napięcia wejściowego

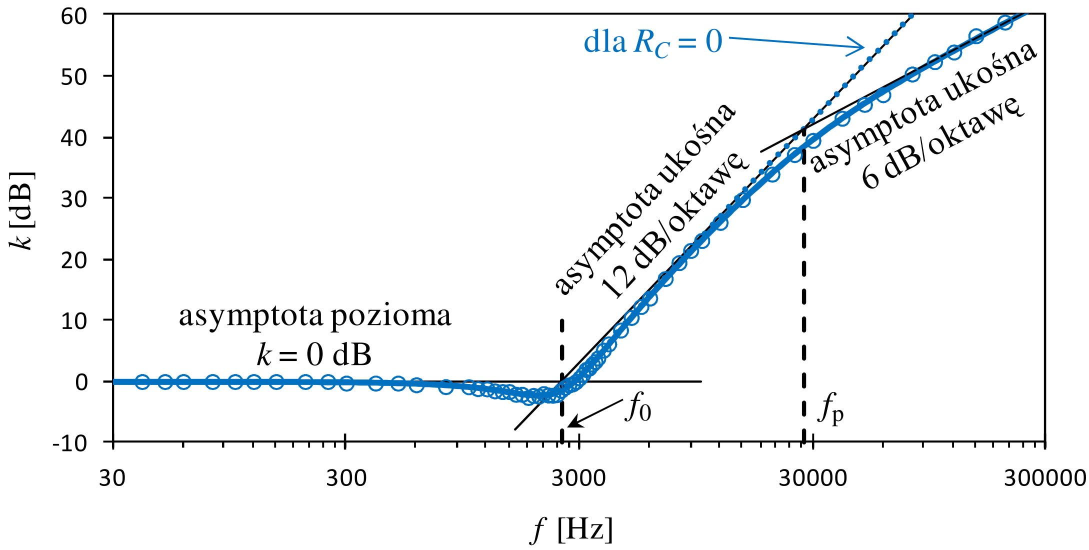
$$\frac{U_{\mathrm{WY}}}{U_{\mathrm{WE}}} = \frac{Qf_0\sqrt{1 + (2\pi f R_C C)^2}}{f\sqrt{1 + Q^2 (f/f_0 - f_0/f)^2}} \tag{41}$$

oraz przesunięcie fazy napięcia wyjściowego względem wejściowego

$$\varphi = -\arccos \frac{-Q(f/f_0 - f_0/f) + 2\pi f R_C C}{\sqrt{1+Q^2(f/f_0 - f_0/f)^2}\sqrt{1+(2\pi f R_C C)^2}}. \tag{42}$$



Rys. 14. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa i fazowo-częstotliwościowa prostego filtra dolnoprzepustowego LC. Punkty oznaczają przykładowe wyniki pomiarów a linie ciągłe zależności teoretyczne (41) i (42).



Rys. 15. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa prostego filtra dolnoprzepustowego LC w skali logarytmicznej na obu osiach.

Ze wzoru (41) wynika, że w układzie dwóch osi logarytmicznych k [dB] oraz $\log(f)$ wykres charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej filtra z idealnym kondensatorem (w którym $R_C = 0$) ma dwie asymptoty: poziomą i 12 dB/oktawę (rys. 15). W przypadku rzeczywistego filtra ($R_C > 0$) zakres niemal stałego nachylenia charakterystyki 12 dB/oktawę = 40 dB/dekadę jest jednak ograniczony i przy odpowiednio wysokich częstotliwościach, dla których $X_C << R_C$ charakterystyka dąży do asymptoty 6 dB/oktawę = 20 dB/dekadę:

$$\begin{aligned}
&\text{dla } f \to 0 \text{ asymptota pozioma} && k = 0\ \text{dB},\\
&\text{dla } R_C << X_C << X_L \text{ asymptota ukośna} && k = 40 \log(f/f_0), \qquad (43)\\
&\text{dla } f \to \infty \text{ asymptota ukośna} && k = 20 \log(f) - 20\log(R_C/2\pi L).
\end{aligned}$$

Asymptoty 0 dB oraz 40 dB/dekadę przecinają się przy częstotliwości rezonansowej f_0 (36), natomiast asymptoty o nachyleniach 40 dB/dekadę i 20 dB/dekadę przecinają się przy częstotliwości f_p

$$f_\text{p} = \frac{1}{2\pi R_C C} \qquad (44)$$

odpowiadającej zrównaniu się reaktancji kondensatora $1/2\pi f_\text{p} C$ z jego rezystancją R_C.

Charakterystyka fazowo-częstotliwościowa dana wzorem (42) przebiega od wartości 0° dla $f \to 0$ i następnie dla filtra z idealnym kondensatorem ($R_C = 0$) przechodzi przez −90° przy częstotliwości f_0 i dąży do −180° dla $f \to \infty$ (rys. 14). Rezystancja $R_C > 0$ powoduje jednak, że przesunięcie fazy osiąga pewne minimum leżące w przedziale −180° ÷ −90° i rośnie przy dalszym wzroście częstotliwości.

Stosunek napięć (41) osiąga wartości większe od jedności w otoczeniu częstotliwości f_0. Zauważmy jednak, że prąd I płynący w obwodzie rezonansowym przekłada się na napięcie U_WY poprzez element C o impedancji malejącej ze wzrostem częstotliwości, tak więc maksimum stosunku napięć U_WY/U_WE przypada dla częstotliwości f_max mniejszej niż częstotliwość f_0 odpowiadająca maksimum prądu I. Duży stopień skomplikowania zależności U_WY/U_WE od f utrudnia teoretyczne wyznaczenie dokładnej częstotliwości f_max. Zauważmy jednak, że w pobliżu częstotliwości f_max możemy z bardzo dobrym przybliżeniem pominąć wyraz zawierający R_C we wzorze (41), co umożliwia analityczne wyprowadzenie związku dla $R_C = 0$

$$f_\text{max} \approx f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \,. \qquad (45)$$

Maksymalna wartość stosunku napięć dla $f = f_\text{max}$ wynosi

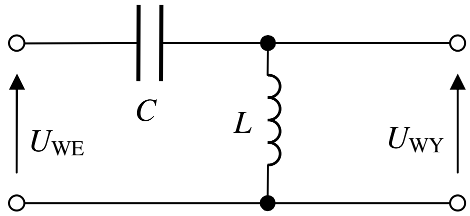
$$\left(\frac{U_\text{WY}}{U_\text{WE}}\right)_\text{max} \approx \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \,. \qquad (46)$$

Stąd, dla zmierzonej wartości $(U_\text{WY}/U_\text{WE})_\text{max}$, dobroć można obliczyć jako

$$Q \approx \left(\frac{U_\text{WY}}{U_\text{WE}}\right)_\text{max} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{U_\text{WY}}{U_\text{WE}}\right)_\text{max}^{-2}}} \,. \qquad (47)$$

3.3.5. Filtr górnoprzepustowy LC (*do części rozszerzonej*)

Schemat prostego filtra górnoprzepustowego LC przedstawiono na rys. 16.



Rys. 16. Schemat prostego filtra górnoprzepustowego LC.

Przyjmując jak poprzednio schematy zastępcze cewki i kondensatora przedstawione na rys. 12 i 13 w mocy pozostają wzory opisujące: impedancję wejściową filtra (34), częstotliwość f_0 (36) odpowiadającą maksimum prądu, dobroć Q (37) i (38) oraz iloraz prądów I/I_0 (39).

Równanie (12) dla rozważanego obwodu ma postać

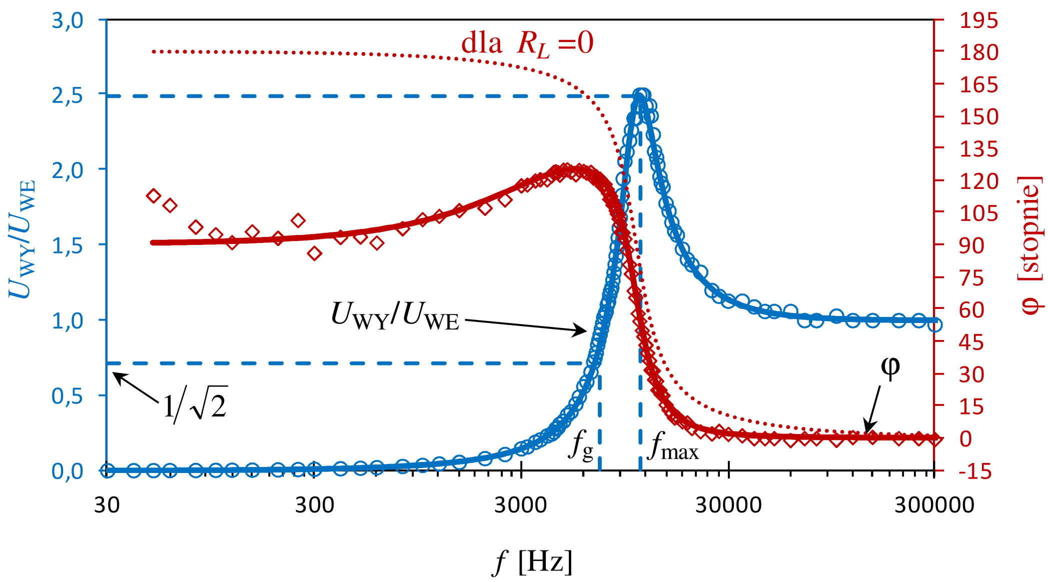
$$\frac{\underline{U}_{WY}}{\underline{U}_{WE}} = \frac{j\,2\pi fL + R_L}{j\left(2\pi fL - \dfrac{1}{2\pi fC}\right) + R_L + R_C} = \frac{(Qf/f_0)(j + R_L/2\pi f L)}{jQ(f/f_0 - f_0/f) + 1}. \tag{48}$$

Stąd stosunek rzeczywistego napięcia wyjściowego do napięcia wejściowego

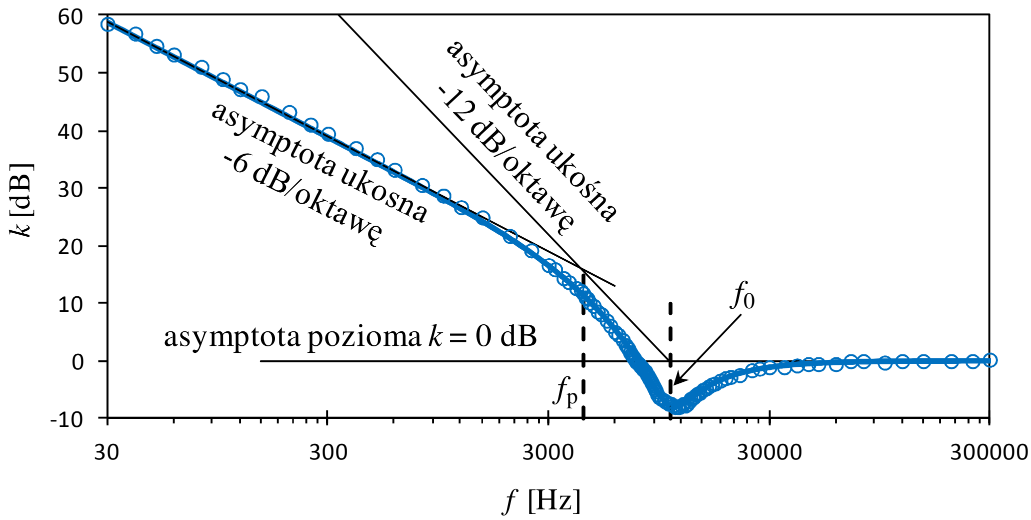
$$\frac{U_{WY}}{U_{WE}} = \frac{Qf\sqrt{1 + (R_L/2\pi f L)^2}}{f_0\sqrt{1 + Q^2(f/f_0 - f_0/f)^2}} \tag{49}$$

oraz przesunięcie fazy napięcia wyjściowego względem wejściowego

$$\varphi = \arccos\frac{Q(f/f_0 - f_0/f) + R_L/2\pi f L}{\sqrt{1 + Q^2(f/f_0 - f_0/f)^2}\sqrt{1 + (R_L/2\pi f L)^2}}. \tag{50}$$



Rys. 17. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa i fazowo-częstotliwościowa prostego filtra górnoprzepustowego LC. Punkty oznaczają przykładowe wyniki pomiarów a linie ciągłe zależności teoretyczne (49) i (50).



Rys. 18. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa prostego filtra górnoprzepustowego LC w skali logarytmicznej na obu osiach.

We współrzędnych k [dB] oraz $\log(f)$ charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa opisana wzorem (49) ma dwie asymptoty (poziomą i −12 dB/oktawę) w przypadku filtra z idealną cewką $R_L = 0$. W rzeczywistym układzie, gdzie $R_L > 0$, rezystancja cewki R_L dominuje jednak nad reaktancją $X_L = 2\pi fL$ dla odpowiednio małych częstotliwości i układ pracuje wtedy jak filtr górnoprzepustowy RC z charakterystyczną asymptotą −6dB/oktawę = −20 dB/dekadę (rys. 18):

dla $f \to 0$ asymptota ukośna $k = -20\log(f) - 20\log(2\pi R_L C)$,
dla $R_L << X_L << X_C$ asymptota ukośna $k = -40\log(f/f_0)$,
dla $f \to \infty$ asymptota pozioma $k = 0$ dB.

Asymptoty o nachyleniach −20 dB/dekadę oraz −40 dB/dekadę przecinają się przy częstotliwości f_p

$$f_p = \frac{R_L}{2\pi L} \tag{51}$$

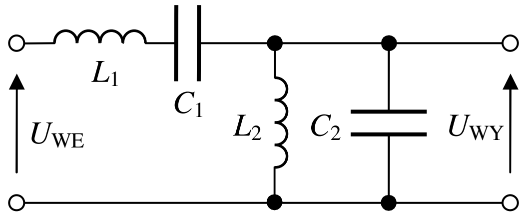
odpowiadającej zrównaniu się reaktancji cewki $2\pi L f_p$ z jej rezystancją R_L, natomiast asymptoty −40 dB/dekadę i 0 dB przecinają się w częstotliwości rezonansowej f_0 (36).

Charakterystyka fazowo-częstotliwościowa dana wzorem (50) w przypadku układu z idealną cewką ($R_L = 0$) maleje monotonicznie od 180° dla $f \to 0$ do 0° dla $f \to \infty$ (rys. 17). Dodatkowa rezystancja $R_L > 0$ powoduje jednak, że charakterystyka rozpoczyna się od 90° dla $f \to 0$, rośnie do pewnej maksymalnej wartości mniejszej od 180° i następnie opada do 0° dla $f \to \infty$.

UWAGA: w układzie badanym w tym ćwiczeniu relacja $R_L << X_L << X_C$ nie jest dobrze spełniona w żadnym zakresie częstotliwości, dlatego teoretyczna asymptota −12 dB/oktawę widoczna na rys. 18 jest wyraźnie przesunięta względem punktów pomiarowych. Wynik ten dobrze obrazuje trudności napotykane podczas projektowania filtrów LC o nachyleniu charakterystyki −12 dB/oktawę obowiązującym w szerokim zakresie częstotliwości. W praktyce zadanie to jest częściej realizowane przy wykorzystaniu aktywnych filtrów RC.

Ponieważ prąd I płynący w obwodzie rezonansowym przekłada się na napięcie U_{WY} na elemencie o impedancji zespolonej $R_L + j2\pi fL$, to maksimum wzmocnienia napięcia U_{WY}/U_{WE} przypada dla częstotliwości f_{max} większej od częstotliwości f_0 odpowiadającej maksimum I. Ponieważ nie możemy z dobrym przybliżeniem zaniedbać wpływu R_L nawet przy częstotliwości f_{max}, wyznaczenie jej teoretycznej wartości jest bardziej skomplikowane niż w przypadku filtra dolnoprzepustowego LC i wykracza poza zakres tego ćwiczenia.

3.3.6. Filtr Wiena LC (*do części rozszerzonej*)



Rys. 19. Schemat filtra Wiena LC.

Równanie (12) dla filtra Wiena LC przedstawionego na rys. 19, z uwzględnieniem schematów zastępczych cewek i kondensatorów jak na rys. 12 i 13, przyjmuje postać

$$\frac{\underline{U}_{WY}}{\underline{U}_{WE}} = \frac{\left[(j2\pi f L_2 + R_{L2})^{-1} + j2\pi f C_2\right]^{-1}}{j\left(2\pi f L_1 - \dfrac{1}{2\pi f C_1}\right) + R_{L1} + \left[(j2\pi f L_2 + R_{L2})^{-1} + j2\pi f C_2\right]^{-1}}. \tag{52}$$

Równanie to jest dość trudne do analizy, dlatego dokładna analiza ilościowa zostanie przedstawiona tylko dla przypadku układu zbudowanego z idealnych cewek i kondensatorów. Podstawienie $R_{L1} = R_{L2} = R_{C1} = R_{C2} = 0$ do wzoru (52) umożliwia uproszczenie go do postaci

$$\frac{\underline{U}_{WY}}{\underline{U}_{WE}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{L_1 C_2}{L_2 C_1}\left(\dfrac{f}{f_1} - \dfrac{f_1}{f}\right)\left(\dfrac{f_2}{f} - \dfrac{f}{f_2}\right) + 1}}, \tag{53}$$

gdzie f_1 i f_2 są częstotliwościami rezonansowymi

$$f_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}}, \quad f_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2 C_2}}. \tag{54}$$

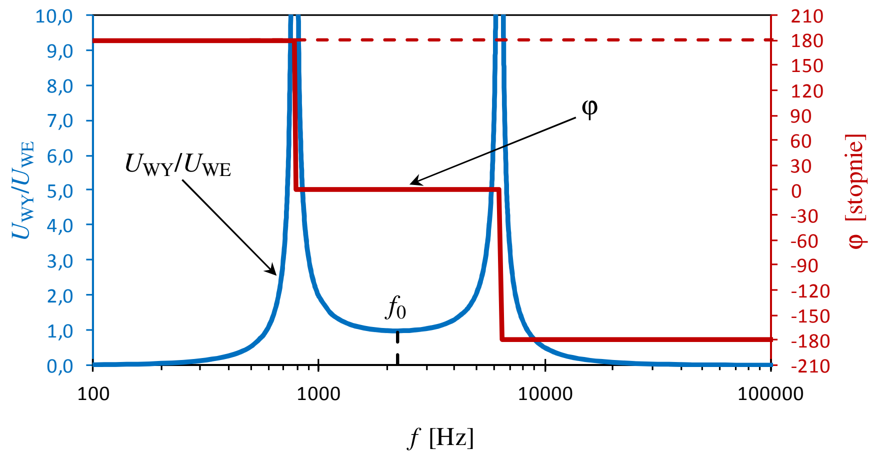
Wyrażenie $\underline{U}_{WY}/\underline{U}_{WE}$ dane wzorem (53) nie zawiera części urojonej i przyjmuje wartości dodatnie w otoczeniu częstotliwości f_0 oraz wartości ujemne dla pozostałych częstotliwości. Przykładowa zależność modułu wyrażenia (53) od f została przedstawiona na rys. 20. Niezależnie od wyboru wartości L_1, L_2, C_1 i C_2 moduł ten osiąga zawsze jedno minimum lokalne przy częstotliwości

$$f_0 = \sqrt{f_1 f_2}, \tag{55}$$

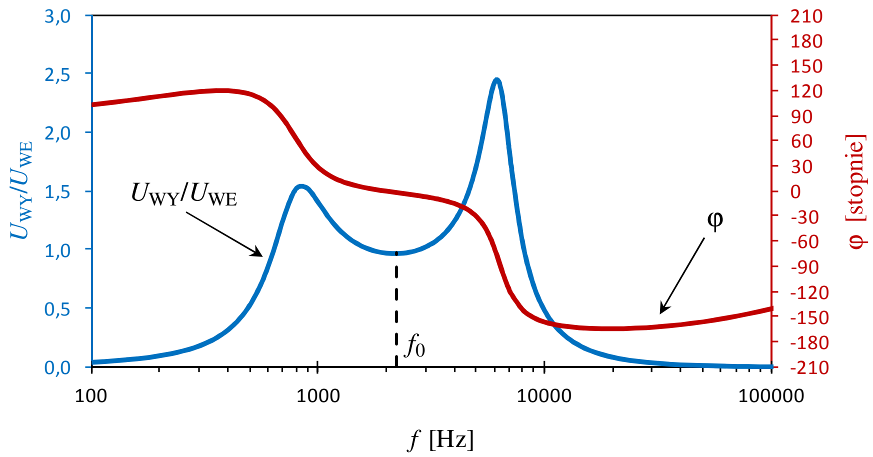
które otoczone jest dwoma maksimami $U_{WY}/U_{WE} \to \infty$. Maksima te występują przy częstotliwościach nie pokrywających się z f_1 ani f_2.

Przesunięcie fazy napięć wynikające z wyrażenia $\underline{U}_{WY}/\underline{U}_{WE}$ danego wzorem (53) przyjmuje tylko wartości $\varphi = 0°$ w otoczeniu częstotliwości f_0 albo $\varphi = \pm 180°$ (rys. 20). Wartości +180° oraz –180° są nieodróżnialne w pomiarach, jednakże możliwe do odróżnienia na podstawie teoretycznej analizy właściwości idealnych cewek i kondensatorów.

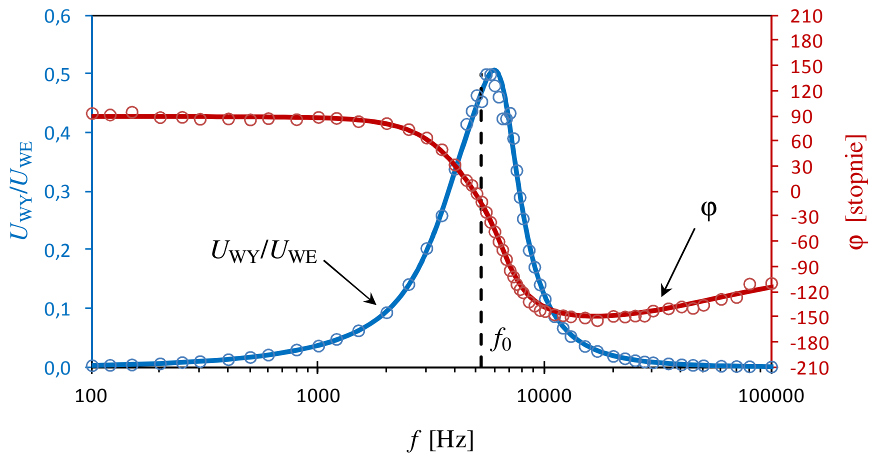
Uwzględnienie większych od zera wartości R_{L1}, R_{L2}, R_{C1}, R_{C2} powoduje, że wyrażenie (52) staje się zespolone. Stopniowy wzrost wartości tych rezystancji początkowo prowadzi do obniżania się wysokości maksimów U_{WY}/U_{WE} oraz złagodzenia gwałtownych przełączeń wartości φ (rys. 21). Dalszy wzrost wartości rezystancji lub wybór innych wartości L i C może doprowadzić do zaniku maksimów oraz przejścia minimum przy częstotliwości zbliżonej do f_0 w pojedyncze maksimum (rys. 22). W układach dostępnych w pracowni możliwe jest wystąpienie obu tych przypadków przy różnych ustawieniach przełącznika Pł.2.



Rys. 20. Przykład teoretycznej charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej i fazowo--częstotliwościowej filtra Wiena LC zbudowanego z idealnych cewek i kondensatorów.



Rys. 21. Przykład teoretycznej charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej i fazowo--częstotliwościowej filtra Wiena LC przy małych wartościach rezystancji szeregowej cewek i kondensatorów w porównaniu do ich reaktancji w otoczeniu częstotliwości f_0.

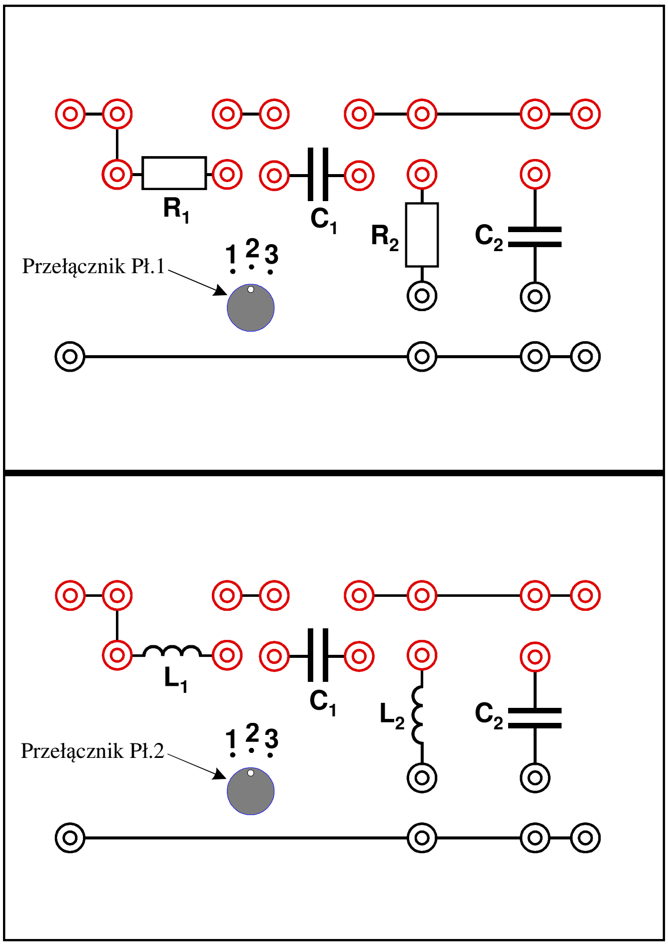


Rys. 22. Przykład charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej i fazowo--częstotliwościowej filtra Wiena LC przy dużych wartościach rezystancji szeregowych cewek. Punkty oznaczają wyniki pomiarów a linie ciągłe zależności teoretyczne.

4. Dostępna aparatura

4.1. Moduł doświadczalny

Moduł doświadczalny składa się z dwóch części (rys. 23):
- górnej zawierającej elementy R_1, R_2, C_1, C_2 z gniazdami do połączeń filtrów typu RC oraz przełącznik Pł.1 umożliwiający wybór wartości C_1 i C_2 (podane w tabeli 2),
- dolnej zawierającej elementy L_1, L_2, C_1, C_2 z gniazdami do połączeń filtrów typu LC oraz przełącznik Pł.2 umożliwiający wybór wartości L_2, C_1 i C_2 (podane w tabeli 3).



Rys. 23. Panel czołowy modułu doświadczalnego.

4.2. Generator funkcyjny

Generator funkcyjny DF1641B [7].

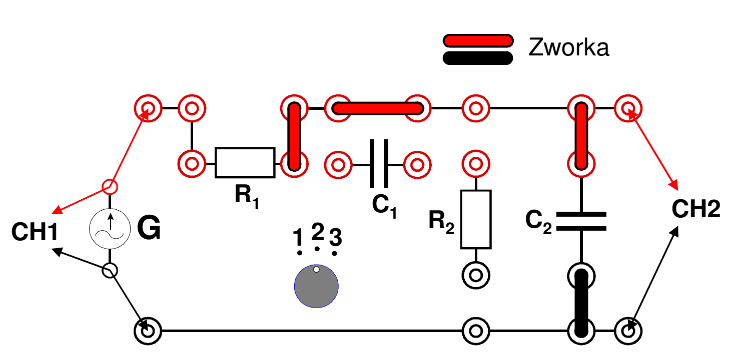
4.3. Oscyloskop

Do obserwacji przebiegów na wejściu i wyjściu badanych filtrów wykorzystuje się dwukanałowy oscyloskop cyfrowy SIGLENT SDS1052DL [7]. Oscyloskop ten umożliwia także wyświetlanie wartości liczbowych napięć, przesunięć fazowych i częstotliwości.

5. Przebieg doświadczenia

5.1. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa i fazowo-częstotliwościowa filtra dolnoprzepustowego RC – część podstawowa

1. Za pośrednictwem trójnika BNC połączyć wyjście OUTPUT generatora **G** jednocześnie z wejściem dzielnika napięcia RC jak na rys. 24 i z wejściem kanału CH1 oscyloskopu. Oscyloskop połączyć z generatorem przewodem BNC-BNC, zaś układ pomiarowy przewodem BNC-wtyki bananowe.
2. Wyjście układu pomiarowego (dzielnika napięcia RC) połączyć przewodem BNC-wtyki bananowe z kanałem CH2 oscyloskopu jak na rys. 24.
3. Po uzyskaniu zezwolenia włączyć zasilanie urządzeń. Przełącznik Pł.1 na panelu modułu doświadczalnego ustawić według zaleceń prowadzącego ćwiczenia.
4. W generatorze wybrać przebieg sinusoidalny i ustawić wstępnie częstotliwość 30 Hz oraz napięcie 20,0 $V_{p\text{-}p}$ kierując się wskazaniami wyświetlaczy wbudowanych w generator.
5. Przed przystąpieniem do pracy z oscyloskopem cyfrowym zalecane jest naciśnięcie przycisku DEFAULT SETUP w celu przywrócenia domyślnych ustawień oscyloskopu. Następnie ustawić oscyloskop do pracy w trybie dwukanałowym (zapalone oba przyciski CH1 i CH2) z trybem sprzęgania AC w każdym kanale. Po naciśnięciu przycisku TRIG MENU wybrać wyzwalanie sygnałem doprowadzonym do wejścia kanału CH1. Ustawić optymalny obraz obu przebiegów.
6. Nacisnąć przycisk MEASURE w celu wyświetlenia na ekranie oscyloskopu menu mierzonych parametrów. Następnie używając przycisków z prawej strony ekranu należy zmienić ustawienia domyślne tak, by wyświetlić: napięcie skuteczne Vrms w kanale CH1 (U_{WE} w tabeli 1), Vrms w kanale CH2 (U_{WY}) oraz różnicę faz CH1-CH2 ($\varphi_{CH1\text{-}CH2}$).
7. Zbadać zmiany napięcia wejściowego U_{WE}, wyjściowego U_{WY} oraz różnicy faz $\varphi_{CH1\text{-}CH2}$ w funkcji częstotliwości f w przedziale 30 Hz ÷ 300 kHz. Optymalny krok zmiany częstotliwości powinien rosnąć mniej więcej proporcjonalnie do częstotliwości już osiągniętej. W przypadku stwierdzenia gwałtownych zmian mierzonych wielkości należy zagęścić pomiary.
   UWAGA: Zmieniając częstotliwość należy pamiętać o korygowaniu nastaw oscyloskopu, tak by zawsze uzyskiwać optymalne obrazy przebiegów przed wykonaniem pomiaru.
8. Otrzymane wyniki pomiarów f, U_{WE}, U_{WY}, $\varphi_{CH1\text{-}CH2}$, wykorzystane nastawy współczynników wzmocnienia oscyloskopu V/DIV oraz pozycję przełącznika Pł.1 zapisać w tabeli 1.



Rys. 24. Schemat połączeń do wyznaczania charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej i fazowo-częstotliwościowej filtra dolnoprzepustowego RC.

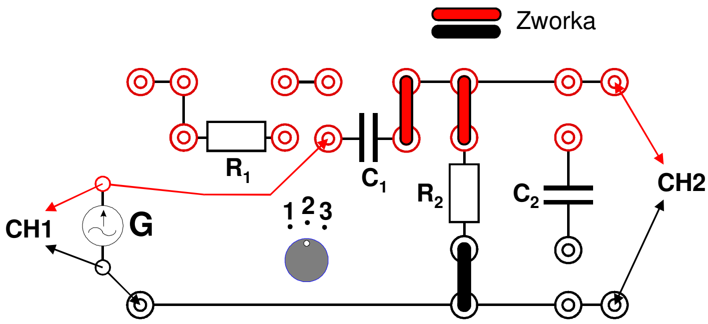
Tabela 1. Wyniki pomiarów dla filtra .... przy przełączniku Pł.1/Pł.2 ustawionym w pozycji ....

f		Δf	U_{WE}		ΔU_{WE}	U_{WY}		ΔU_{WE}	$\varphi_{CH1-CH2}$	φ_{WY-WE}	U_{WY}/U_{WE}	$\Delta(U_{WY}/U_{WE})$	k	Δk
[Hz]	[kHz]	[kHz]	[V/DIV]	[V]	[V]	[V/DIV]	[V]	[V]	[stopnie]	[stopnie]			[dB]	[dB]

UWAGA: podczas pomiarów należy notować tylko niezbędne dane: f [Hz albo kHz], U_{WE} [V/DIV], U_{WE} [V], U_{WY} [V/DIV], U_{WY} [V], $\varphi_{CH1-CH2}$ [stopnie].
Pozostałe wyniki będą obliczane podczas przygotowywania sprawozdania (patrz rozdział 6, pkt. 5).

5.2. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa i fazowo-częstotliwościowa filtra górnoprzepustowego RC – część podstawowa

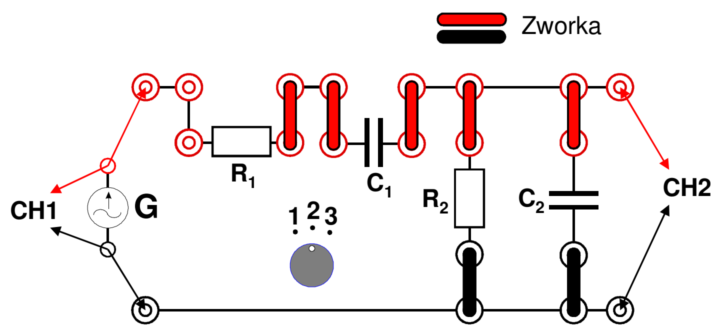
1. Za pośrednictwem trójnika BNC połączyć wyjście OUTPUT generatora **G** jednocześnie z wejściem dzielnika napięcia RC jak na rys. 25 i z kanałem CH1 oscyloskopu. Oscyloskop połączyć z generatorem przewodem BNC-BNC, zaś układ pomiarowy przewodem BNC-wtyki bananowe.
2. Wyjście układu pomiarowego (dzielnika napięcia RC) połączyć przewodem BNC-wtyki bananowe z kanałem CH2 oscyloskopu jak na rys. 25.
3. Przygotować nowy egzemplarz tabeli 1 z odpowiednim opisem badanego filtra.
4. Pomiary przeprowadzić analogicznie jak wcześniej w punktach 3-8 rozdziału 5.1.



Rys. 25. Schemat połączeń do wyznaczania charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej i fazowo-częstotliwościowej filtra górnoprzepustowego RC.

5.3. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa i fazowo-częstotliwościowa filtra Wiena RC – część podstawowa

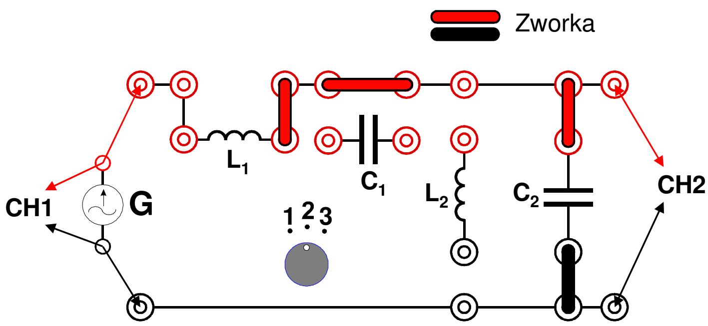
1. Za pośrednictwem trójnika BNC połączyć wyjście OUTPUT generatora **G** jednocześnie z wejściem dzielnika napięcia RC jak na rys. 26 i z kanałem CH1 oscyloskopu. Oscyloskop połączyć z generatorem przewodem BNC-BNC, zaś układ pomiarowy przewodem BNC-wtyki bananowe.
2. Wyjście układu pomiarowego (dzielnika napięcia RC) połączyć przewodem BNC-wtyki bananowe z kanałem CH2 oscyloskopu jak na rys. 26.
3. Przygotować nowy egzemplarz tabeli 1 z odpowiednim opisem badanego filtra.
4. Pomiary przeprowadzić analogicznie jak wcześniej w punktach 3-8 rozdziału 5.1.
   UWAGA: należy zwrócić szczególną uwagę na zagęszczenie pomiarów w pobliżu częstotliwości, dla której U_{WY}/U_{WE} osiąga maksimum natomiast $\varphi_{CH1\text{-}CH2} = 0°$.



Rys. 26. Schemat połączeń do wyznaczania charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej i fazowo-częstotliwościowej filtra Wiena RC.

5.4. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa i fazowo-częstotliwościowa filtra dolnoprzepustowego LC – część podstawowa

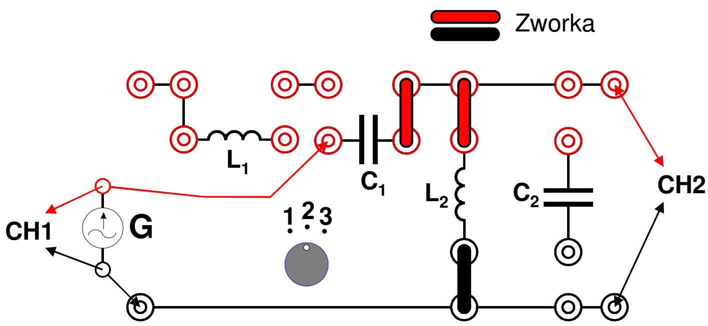
1. Za pośrednictwem trójnika BNC połączyć wyjście OUTPUT generatora **G** jednocześnie z wejściem dzielnika napięcia LC jak na rys. 27 i z kanałem CH1 oscyloskopu. Oscyloskop połączyć z generatorem przewodem BNC-BNC, zaś układ pomiarowy przewodem BNC-wtyki bananowe.
2. Wyjście układu pomiarowego (dzielnika napięcia LC) połączyć przewodem BNC-wtyki bananowe z kanałem CH2 oscyloskopu jak na rys. 27.
3. Przygotować nowy egzemplarz tabeli 1 z odpowiednim opisem badanego filtra.
4. Pomiary przeprowadzić analogicznie jak wcześniej w punktach 3-8 rozdziału 5.1.
   UWAGA: należy zwrócić szczególną uwagę na zagęszczenie pomiarów w pobliżu częstotliwości, dla której U_{WY}/U_{WE} osiąga maksimum.



Rys. 27. Schemat połączeń do wyznaczania charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej i fazowo-częstotliwościowej filtra dolnoprzepustowego LC.

5.5. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa i fazowo-częstotliwościowa filtra górnoprzepustowego LC – część rozszerzona

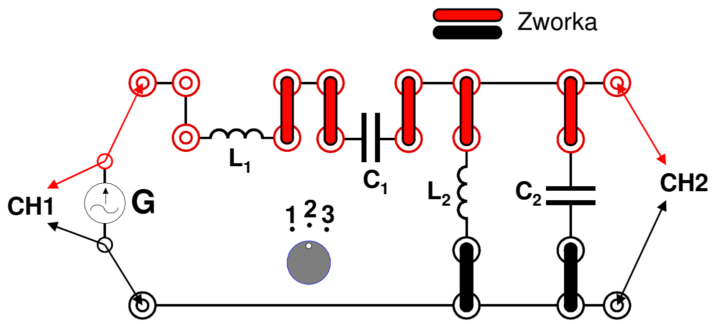
1. Za pośrednictwem trójnika BNC połączyć wyjście OUTPUT generatora **G** jednocześnie z wejściem dzielnika napięcia LC jak na rys. 28 i z kanałem CH1 oscyloskopu. Oscyloskop połączyć z generatorem przewodem BNC-BNC, zaś układ pomiarowy przewodem BNC-wtyki bananowe.
2. Wyjście układu pomiarowego (dzielnika napięcia LC) połączyć przewodem BNC-wtyki bananowe z kanałem CH2 oscyloskopu jak na rys. 28.
3. Przygotować nowy egzemplarz tabeli 1 z odpowiednim opisem badanego filtra.
4. Pomiary przeprowadzić analogicznie jak wcześniej w punktach 3-8 rozdziału 5.1.
   UWAGA: należy zwrócić szczególną uwagę na zagęszczenie pomiarów w pobliżu częstotliwości, dla której U_{WY}/U_{WE} osiąga maksimum.



Rys. 28. Schemat połączeń do wyznaczania charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej i fazowo-częstotliwościowej filtra górnoprzepustowego LC.

5.6. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa i fazowo-częstotliwościowa filtra Wiena LC – część rozszerzona

1. Za pośrednictwem trójnika BNC połączyć wyjście OUTPUT generatora **G** jednocześnie z wejściem dzielnika napięcia LC jak na rys. 29 i z kanałem CH1 oscyloskopu. Oscyloskop połączyć z generatorem przewodem BNC-BNC, zaś układ pomiarowy przewodem BNC-wtyki bananowe.
2. Wyjście układu pomiarowego (dzielnika napięcia LC) połączyć przewodem BNC-wtyki bananowe z kanałem CH2 oscyloskopu jak na rys. 29.
3. Przygotować nowy egzemplarz tabeli 1 z odpowiednim opisem badanego filtra.
4. Pomiary przeprowadzić analogicznie jak wcześniej w punktach 3-8 rozdziału 5.1, przy czym obecnie zakres zmian częstotliwości można ograniczyć do przedziału 100 Hz ÷ 100 kHz.
   UWAGA: przed pomiarami właściwymi zalecane jest wstępne wyszukanie maksimów charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej (możliwe jest jedno albo dwa maksima). Należy zwrócić szczególną uwagę na zagęszczenie pomiarów w pobliżu częstotliwości, dla których U_{WY}/U_{WE} osiąga maksima.



Rys. 29. Schemat połączeń do wyznaczania charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej i fazowo-częstotliwościowej filtra Wiena LC.

6. Wskazówki do raportu

Raport powinien zawierać:

1. Stronę tytułową (wg wzoru).
2. Wstęp i sformułowanie celu ćwiczenia.
   Wstęp do sprawozdania powinien zawierać definicje podstawowych pojęć występujących w sprawozdaniu oraz wzory wykorzystane w obliczeniach. W celu łatwiejszego i jednoznacznego odwoływania się do wzorów występujących we wstępie jak i w dalszej części sprawozdania wszystkie z nich powinny być opatrzone numerami porządkowymi.
3. Schematy układów pomiarowych.
   W sprawozdaniu należy umieścić schematy tylko takich układów, które były rzeczywiście zestawiane w trakcie wykonywania pomiarów. Każdy schemat powinien być opatrzony numerem kolejnym i zatytułowany. Wszystkie elementy pokazane na schemacie muszą być jednoznacznie opisane i oznaczone za pomocą powszechnie stosowanej symboliki.
4. Wykaz aparatury (nr inwentarzowy, typ, wykorzystywane nastawy i zakresy).
   W wykazie aparatury należy jednoznacznie opisać używaną aparaturę pomiarową poprzez podanie numeru inwentarzowego, typu itd. Nadane poszczególnym przyrządom oznaczenia należy konsekwentnie stosować na wszystkich schematach i w opisach.
5. Stabelaryzowane wyniki pomiarów i nastawy aparatury.
   Każda tabela powinna posiadać swój numer kolejny i tytuł. Oprócz kopii notatek wykonanych podczas zajęć w tabelach należy uzupełnić:
   5.1. Oszacowanie niepewności granicznych Δf, dla pomiarów częstotliwości f, według aneksu A8 instrukcji do ćwiczenia E01 „Miernictwo" lub według instrukcji do generatora funkcyjnego [7].
   5.2. Oszacowanie niepewności granicznych ΔU_{WE} i ΔU_{WY}, dla pomiarów napięć U_{WE} oraz U_{WY} odczytanych z oscyloskopu, według aneksu A6 instrukcji do ćwiczenia E01 „Miernictwo" lub według instrukcji do oscyloskopu [7].
   5.3. Wartości $\varphi_{CH1\text{-}CH2}$ zanotowane z ekranu oscyloskopu, które dotyczą fazy wejścia układu (CH1) w stosunku do wyjścia (CH2) i zawarte są w przedziale $0° \div 360°$, należy zanegować w celu otrzymania fazy wyjścia w stosunku do wejścia a następnie przeskalować do przedziału $-180° \div +180°$ i zapisać wynik w tabeli jako $\varphi_{WY\text{-}WE}$. Przeskalowanie polega na przepisaniu bez zmian wartości od $-180°$ do $+180°$, natomiast wartości mniejsze od $-180°$ należy sprowadzić do tego przedziału przez dodanie 360°, zaś w przypadku wartości większych od +180° należy odjąć 360°. W arkuszu kalkulacyjnym MS EXCEL wymagane obliczenia wykonuje formuła:

      =MOD(180 – C4;360) – 180

      gdzie C4 jest przykładowym adresem komórki zawierającej wartość $\varphi_{CH1\text{-}CH2}$.
      UWAGA: tylko wartości $\varphi_{WY\text{-}WE}$ są bezpośrednio porównywalne z przewidywaniami teoretycznymi dotyczącymi przesunięci fazy, które podano w rozdziałach 3.3.1 ÷ 3.3.6.
   5.4. Wyniki obliczeń U_{WY}/U_{WE} oraz współczynnika tłumienia k według wzoru (17).
   5.5. Oszacowanie złożonych niepewności granicznych $\Delta(U_{WY}/U_{WE})$ oraz Δk, wielkości wyznaczanych w sposób pośredni. Wykonując obliczenia należy zwrócić uwagę, że składowe niepewności graniczne, w odróżnieniu od niepewności standardowych, podlegają prawu propagacji niepewności granicznej metodą różniczki zupełnej, opisanej np. w [8], rozdział II.2.5. lub w [9], rozdział 7.6. Jeżeli wyznaczana

wielkość jest znaną funkcją wielu zmiennych $y = y(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, przy czym każda bezpośrednio mierzona zmienna x_i podlega prostokątnemu rozkładowi prawdopodobieństwa i obarczona jest określoną graniczną niepewnością pomiarową Δx_i, to złożona niepewność graniczna Δy może być obliczona ze wzoru:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| \Delta x_i \, . \tag{56}$$

Stąd, dla ilorazu napięć U_{WY}/U_{WE}, otrzymujemy

$$\Delta\left(U_{WY}/U_{WE}\right) = \frac{U_{WY}}{U_{WE}} \left(\frac{\Delta U_{WY}}{U_{WY}} + \frac{\Delta U_{WE}}{U_{WE}} \right), \tag{57}$$

natomiast w przypadku współczynnika tłumienia k zdefiniowanego wzorem (17)

$$\Delta k = \frac{20}{\ln 10} \frac{\Delta\left(U_{WY}/U_{WE}\right)}{U_{WY}/U_{WE}} \, . \tag{58}$$

6. Wykresy i analizę wyników.
   6.1. Wszystkie wykresy wykonane na podstawie przeprowadzonych pomiarów powinny mieć numery porządkowe oraz podpisy zawierające informację o tym co dany wykres przedstawia. Dla każdego zbadanego filtra należy wykonać wykresy:
   - charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej $U_{WY}/U_{WE}(f)$,
   - charakterystyki fazowo-częstotliwościowej $\varphi_{WY\text{-}WE}(f)$ [stopnie],
   - współczynnika tłumienia $k(f)$ [dB].

   UWAGA: ze względu na szeroki zakres badanych częstotliwości na wszystkich wykresach należy stosować skalę logarytmiczną na osi f [Hz].
   6.2. Dla filtra dolnoprzepustowego RC oraz filtra górnoprzepustowego RC:
   6.2.1. Odczytać z wykresu częstotliwość graniczną f_g, dla której spełniony jest warunek $U_{WY}/U_{WE} = 1/\sqrt{2}$, co odpowiada tzw. 3 decybelowej częstotliwości granicznej oraz oszacować jej niepewność graniczną Δf_g.
   UWAGA: niepewność pomiaru częstotliwości Δf przy użyciu generatora jest bardzo mała i nie ma istotnego znaczenia podczas szacowania niepewności granicznej Δf_g. Niepewność graniczną Δf_g wynika głównie z niepewności granicznej ilorazu napięć U_{WY}/U_{WE}.
   6.2.2. Wykorzystując parametry elementów RC podane w tabeli 2 obliczyć teoretyczną częstotliwość graniczną f_g według wzoru (20).
   6.2.3. Porównać wyniki otrzymane w punktach 6.2.1 i 6.2.2.
   6.3. Dla filtra Wiena RC:
   6.3.1. Odczytać z wykresu: maksimum $(U_{WY}/U_{WE})_{max}$, częstotliwość f_0 odpowiadającą temu maksimum, oraz dwie częstotliwości graniczne f_{g1} i f_{g2} dla tłumienia 3 dB mierzonego względem poziomu maksimum (patrz rys. 9). Na podstawie odczytanych wartości obliczyć dobroć Q według wzoru (30).
   6.3.2. Wykorzystując parametry elementów RC podane w tabeli 2 obliczyć teoretyczne wartości: f_0 według wzoru (28), $(U_{WY}/U_{WE})_{max}$ według wzoru (29) oraz Q według wzoru (31).
   6.3.3. Porównać wyniki otrzymane w punktach 6.3.1 i 6.3.2.
   6.4. Dla filtra dolnoprzepustowego LC
   6.4.1. Odczytać z wykresu: maksimum $(U_{WY}/U_{WE})_{max}$ i wykorzystując ten wynik obliczyć doświadczalną wartość dobroci Q według wzoru (47).

6.4.2. Wykorzystując parametry elementów LC podane w tabeli 3 obliczyć teoretyczną wartość dobroci Q według wzoru (38). Wartości rezystancji szeregowej kondensatora R_{C2} nie są znane, jednakże można przyjąć $R_{C2} << R_{L1}$, co umożliwia wyznaczenie przybliżonej wartości rezystancji szeregowej $R \approx R_{L1}$.

6.4.3. Porównać wyniki otrzymane w punktach 6.4.1 i 6.4.2.

6.5. Dla filtra górnoprzepustowego LC (*wersja rozszerzona*)

6.5.1. Wykorzystując parametry elementów LC podane w tabeli 3 obliczyć teoretyczne wartości częstotliwości przecięcia asymptot: f_0 według wzoru (36) i f_p według wzoru (51).

6.5.2. Na wykresie zależności $k(f)$ [dB] oznaczyć częstotliwości f_0 i f_p obliczone w punkcie 6.5.1 oraz wykreślić trzy teoretyczne asymptoty według równań podanych na str. 17 poniżej rys. 18.

6.5.3. Ocenić stopień zgodności teoretycznych asymptot z otrzymaną doświadczalnie zależnością $k(f)$ [dB].

6.6. Dla filtra Wiena LC (*wersja rozszerzona*)

6.6.1. Wykorzystując parametry elementów LC podane w tabeli 3 obliczyć teoretyczną wartość częstotliwości środkowej f_0 danej wzorem (55) i oznaczyć ją na wykresie $U_{WY}/U_{WE}(f)$.

6.6.2. Ocenić liczbę maksimów zależności $U_{WY}/U_{WE}(f)$ występującą dla danej pozycji przełącznika Pł.2. w zbadanym module doświadczalnym.

7. Uwagi końcowe i wnioski.
   W uwagach końcowych należy zamieścić własne spostrzeżenia co do przebiegu całego ćwiczenia. Należy także ocenić stopień zgodności otrzymanych wyników doświadczalnych z przewidywaniami teoretycznymi i wskazać ewentualne przypadki występowania szczególnie dużych rozbieżności.

W raporcie ocenie podlegać będzie obecność i poprawność wszystkich wymienionych powyżej składników, czytelność prezentacji wyników w postaci tabel, wykresów i wyników liczbowych wraz z jednostkami i opisami oraz jakość sformułowanych wniosków.

Tabela 2. Parametry elementów w filtrach RC uśrednione dla modułów F1-01 ÷ F1-04.

Pozycja przełącznika Pł.1	R_1 [kΩ]	R_2 [kΩ]	C_1 [nF] przy 1000 Hz	C_2 [nF] przy 1000 Hz
1	0,498 ± 0,008	1,017 ± 0,020	213 ± 4	215 ± 6
2	0,498 ± 0,008	1,017 ± 0,020	456 ± 12	464 ± 11
3	0,498 ± 0,008	1,017 ± 0,020	967 ± 25	985 ± 15

Tabela 3. Parametry elementów w filtrach LC uśrednione dla modułów F1-01 ÷ F1-04.

Pozycja przełącznika Pł.2	L_1 [mH]	R_{L1} [Ω]	L_2 [mH]	R_{L2} [Ω]	C_1 [nF] przy 1000 Hz	C_2 [nF] przy 1000 Hz
1	3,9 ± 0,2	41,4 ± 2,3	1,00 ± 0,05	24,4 ± 0,7	218 ± 4	981 ± 23
2	3,9 ± 0,2	41,4 ± 2,3	3,9 ± 0,2	42,2 ± 1,9	467 ± 4	462 ± 11
3	3,9 ± 0,2	41,4 ± 2,3	33 ± 1	63,9 ± 2,3	1001 ± 49	217 ± 5

7. Literatura

7.1. Literatura podstawowa

[1] R. Śledziewski, „*Elektronika dla Fizyków*”, PWN, W-wa 1984.
[2] T. Stacewicz, A. Kotlicki, „*Elektronika w laboratorium naukowym*”, PWN, W-wa 1994.
[3] E. Koziej, B. Sochoń, „*Elektrotechnika i elektronika*”, PWN, W-wa 1980.
[4] R. Resnick, D. Halliday, „*Fizyka*”, tom. II, PWN, W-wa 1998.
http://han.p.lodz.pl/han/ibuk-libra/https/libra.ibuk.pl/book/146326
[5] A. Hennel, W. Szuszkiewicz, „*Zadania i problemy z Fizyki*”, tom II, PWN, W-wa 1993.
[6] A. Januszajtis, „*Fizyka dla Politechnik – Fale*”, tom III, PWN, W-wa 1991.

7.2. Literatura uzupełniająca

[7] Instrukcje obsługi do multimetrów, generatora funkcyjnego i oscyloskopu dostępne są na stronie internetowej:
https://fizyka.p.lodz.pl/pl/dla-studentow/podstawy-elektroniki-laboratorium/zasoby/
[8] B. Żółtowski, „*Wprowadzenie do zajęć laboratoryjnych z fizyki*”, skrypt PŁ, rozdział „II.2. Obliczanie wartości błędów”, dostępny na stronie internetowej:
https://fizyka.p.lodz.pl/pl/dla-studentow/podstawy-elektroniki-laboratorium/zasoby/
[9] A. Zięba, *Analiza danych w naukach ścisłych i technice*, PWN, Warszawa, 2014, rozdział „7. Pomiar pośredni. Prawo propagacji niepewności”
http://han.p.lodz.pl/han/ibuk-libra/https/libra.ibuk.pl/book/71824