



Politechnika Łódzka

Instytut Fizyki

## Laboratorium elektroniki

### Ćwiczenie E05IS

#### Filtry pasywne

## Spis treści:

1. Cel ćwiczenia.....	3
2. Zagrożenia .....	3
3. Wprowadzenie teoretyczne.....	3
3.1. Elementy R, L, C w obwodach prądu sinusoidalnie zmiennego.....	3
3.2. Dzielnik napięcia w obwodzie prądu sinusoidalnie zmiennego.....	5
3.3. Filtry .....	6
3.3.1. Filtr dolnoprzepustowy RC .....	7
3.3.2. Filtr górnoprzepustowy RC .....	8
3.3.3. Filtr Wienera RC .....	10
3.3.4. Filtr dolnoprzepustowy LC .....	12
3.3.5. Filtr górnoprzepustowy LC (do części rozszerzonej).....	16
3.3.6. Filtr Wienera LC (do części rozszerzonej) .....	18
4. Dostępna aparatura .....	20
4.1. Moduł doświadczalny.....	20
4.2. Generator funkcyjny.....	20
4.3. Oscyloskop .....	20
5. Przebieg doświadczenia.....	21
5.1. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa i fazowo-częstotliwościowa filtra dolnoprzepustowego RC – część podstawowa .....	21
5.2. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa i fazowo-częstotliwościowa filtra górnoprzepustowego RC – część podstawowa .....	23
5.3. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa i fazowo-częstotliwościowa filtra Wienera RC – część podstawowa .....	24
5.4. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa i fazowo-częstotliwościowa filtra dolnoprzepustowego LC – część podstawowa .....	25
5.5. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa i fazowo-częstotliwościowa filtra górnoprzepustowego LC – część rozszerzona .....	26
5.6. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa i fazowo-częstotliwościowa filtra Wienera LC – część rozszerzona .....	27
6. Wskazówki do raportu.....	28
7. Literatura .....	31
7.1. Literatura podstawowa .....	31
7.2. Literatura uzupełniająca .....	31

Przed zapoznaniem się z instrukcją i przystąpieniem do wykonywania ćwiczenia należy opanować następujący materiał teoretyczny:

1. Bierne elementy elektroniczne [1-3].
2. Dzielnik napięcia [1,2,4].
3. Obwody RC, LC i RLC [1,5,6].

## 1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wykonanie i analiza charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych i fazowo-częstotliwościowych następujących filtrów pasywnych:

- 1) filtra dolnoprzepustowego RC i LC,
- 2) filtra górnoprzepustowego RC i LC,
- 3) filtra Wienera RC i LC.

## 2. Zagrożenia

Rodzaj	Brak	Małe	Średnie	Duże
zagrożenie elektryczne		+		
zagrożenie optyczne	+			
zagrożenie mechaniczne (w tym akustyczne, hałas)	+			
zagrożenie polem elektro-magnetycznym (poza widmem optycznym)	+			
zagrożenie biologiczne	+			
zagrożenie radioaktywne (jonizujące)	+			
zagrożenie chemiczne	+			
zagrożenie termiczne (w tym wybuch i pożar)	+			

**Przewody z wtykami bananowymi są przeznaczone wyłącznie do użytku w obwodach niskiego napięcia – nie wolno podłączać ich do gniazda sieci zasilającej 230 V.**

## 3. Wprowadzenie teoretyczne

### 3.1. Elementy R, L, C w obwodach prądu sinusoidalnie zmiennego

Każdy wektor na płaszczyźnie zespolonej można przedstawić w postaci liczby zespolonej. Niezależnie od znaczenia fizycznego wielkości zespolone będziemy zapisywali przy użyciu symboli podkreślonych, np.:

$$\underline{A} = \operatorname{Re}(\underline{A}) + j \operatorname{Im}(\underline{A}) = A \exp(j\alpha) = A(\cos \alpha + j \sin \alpha), \quad (1)$$

gdzie  $A$  jest modułem liczby zespolonej  $\underline{A}$ ,  $j = \sqrt{-1}$  jest jednością urojoną,  $\operatorname{Re}(\underline{A})$  i  $\operatorname{Im}(\underline{A})$  są rzutami wektora  $\underline{A}$  odpowiednio na oś liczb rzeczywistych i urojonych, zaś  $\alpha$  jest argumentem liczby zespolonej.

W obwodach prądu zmiennego przebiegi prądu mogą być przesunięte w fazie względem przebiegów napięcia. Zależności pomiędzy takimi wielkościami można łatwo wyrazić w postaci prawa Ohma zapisanego w dziedzinie liczb zespolonych

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I} \quad \text{lub} \quad \underline{I} = \underline{Y} \underline{U}, \quad (2)$$

gdzie  $\underline{U}$  oraz  $\underline{I}$  reprezentują zespolone napięcie oraz zespolony prąd,  $\underline{Z}$  jest zespoloną impedancją i ma wymiar oporu elektrycznego [ $\Omega$ ], zaś  $\underline{Y}$  jest zespoloną admitancją i ma wymiar przewodności [S] (simens). Korzystając ze wzorów (1) wielkość zespolona  $\underline{Z}$  może być wyrażona w następujących postaciach

$$\underline{Z} = R + j X \quad \text{lub} \quad \underline{Z} = Z \exp(j\phi), \quad (3)$$

gdzie: moduł impedancji  $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$  jest zwany zawadą,  
 $\phi = \text{tg}(X/R)$  jest kątem przesunięcia fazy zmian napięcia względem zmian prądu,  
 $R = \text{Re}(\underline{Z}) = Z \cos \phi$  jest rezystancją,  
 $X = \text{Im}(\underline{Z}) = Z \sin \phi$  jest reaktancją lub oporem pozornym (nie wydziela ciepła).

Analogicznie zespolona admitancja

$$\underline{Y} = G + j B \quad \text{lub} \quad \underline{Y} = Y \exp(j\phi'), \quad (4)$$

gdzie:  $Y = \sqrt{G^2 + B^2}$  jest modulem admitancji,  
 $\phi' = \text{tg}(B/G)$ ,  
 $G = \text{Re}(\underline{Y}) = Y \cos \phi'$  jest konduktancją,  
 $B = \text{Im}(\underline{Y}) = Y \sin \phi'$  jest susceptancją.

Między impedancją a admitancją zachodzą zależności:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{G - jB}{Y^2}, \quad \phi = -\phi'. \quad (5)$$

Jeżeli do zacisków idealnej cewki o indukcyjności  $L$  [H] przyłożymy sinusoidalnie zmienne napięcie o częstotliwości  $f$ , to zmiany napięcia będą wyprzedzać zmiany prądu o kąt  $\phi = \pi/2$  i reaktancja cewki wyniesie

$$X_L = 2\pi f L. \quad (6)$$

W przypadku idealnego kondensatora o pojemności  $C$  [F] reaktancja wyniesie

$$X_C = -\frac{1}{2\pi f C}, \quad (7)$$

przy czym zazwyczaj przyjmuje się ujemny znak  $X_C$  wynikający z ujemnej wartości kąta fazowego  $\phi = -\pi/2$ .

Reaktancja szeregowo połączonej cewki oraz kondensatora może być obliczona jako suma reaktancji składowych  $X = X_L + X_C$ . W przypadku ogólnym zespolona impedancja zastępcza układu  $n$  szeregowo połączonych dowolnych impedancji składowych wynosi

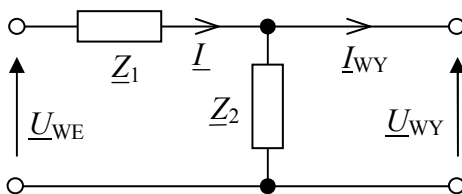
$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_n. \quad (8)$$

W przypadku równoległego połączenia elementów wygodniej jest posługiwać się pojęciem admitancji. Zespolona admitancja zastępcza układu  $n$  równoległe połączonych admitancji składowych jest równa sumie tych admitancji

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \dots + \underline{Y}_n. \quad (9)$$

### 3.2. Dzielnik napięcia w obwodzie prądu sinusoidalnie zmiennego

Wszystkie układy badane w tym ćwiczeniu mają strukturę dzielnika napięcia przedstawioną na rys. 1, przy czym elementy składowe w ogólnym przypadku są opisane zespolonymi impedancjami  $\underline{Z}_1$  i  $\underline{Z}_2$ .



Rys. 1. Schemat dzielnika napięcia.

Jeżeli prąd  $I_{WY}$  płynący w obwodzie wyjściowym dzielnika jest pomijalnie mały, to przez elementy  $\underline{Z}_1$  i  $\underline{Z}_2$  przepływa ten sam prąd  $\underline{I}$ . Prawo Ohma (2) zapisane dla samej impedancji  $\underline{Z}_2$  oraz dla szeregowego połączenia  $\underline{Z}_1$  i  $\underline{Z}_2$  przyjmuje wówczas postać

$$\underline{U}_{WY} = \underline{Z}_2 \underline{I}, \quad (10)$$

$$\underline{U}_{WE} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \underline{I}. \quad (11)$$

Stąd, eliminując prąd  $\underline{I}$  otrzymujemy

$$\frac{\underline{U}_{WY}}{\underline{U}_{WE}} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}. \quad (12)$$

Ponieważ (12) jest związkiem wielkości zespolonych, wygodniej będzie analizować osobno jego część rzeczywistą opisującą stosunek łatwych do pomiaru amplitud (lub wartości skutecznych) napięć

$$\frac{U_{WY}}{U_{WE}} = \left| \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \right|. \quad (13)$$

Ponadto, jeżeli sinusoidalnie zmiennie napięcia zespolone wyrazimy w postaci

$$\underline{U}_{WE} = U_{WE} \exp[j(\omega t + \varphi_{WE})] \quad \text{oraz} \quad \underline{U}_{WY} = U_{WY} \exp[j(\omega t + \varphi_{WY})], \quad (14)$$

to przesunięcie fazy napięcia mierzone pomiędzy wyjściem i wejściem dzielnika  $\varphi = \varphi_{WY} - \varphi_{WE}$  może być obliczone jako

$$\varphi = \arctg \frac{\text{Im}(\underline{U}_{WY}/\underline{U}_{WE})}{\text{Re}(\underline{U}_{WY}/\underline{U}_{WE})}. \quad (15)$$

W przypadku filtrów LC zakres zmian  $\varphi$  wykracza poza przedział  $-\pi/2 \div +\pi/2$  opisany przez funkcję arcus tangens i wówczas należy wykorzystać wzór

$$\varphi = \frac{\text{Im}(\underline{U}_{WY}/\underline{U}_{WE})}{|\text{Im}(\underline{U}_{WY}/\underline{U}_{WE})|} \arccos \frac{\text{Re}(\underline{U}_{WY}/\underline{U}_{WE})}{|\underline{U}_{WY}/\underline{U}_{WE}|}. \quad (16)$$

### 3.3. Filtry

Filtrem częstotliwości nazywamy układ o strukturze czwórnika (czwórnik to układ mający cztery zaciski - jedna z par zacisków pełni rolę wejścia, zaś druga wyjścia), który „przepuszcza” sygnały w określonym paśmie częstotliwości, a tłumi sygnały leżące poza tym pasmem. Filtry częstotliwości mają głównie zastosowanie w urządzeniach elektronicznych i energetycznych. Filtry umieszczone pomiędzy źródłem sygnału a odbiornikiem powodują, że do odbiornika dostaje się sygnał o pożądanym widmie częstotliwości, co oznacza, że sygnały niepożądane są eliminowane.

Pasmo częstotliwości, w którym filtr przepuszcza sygnały z małym tłumieniem nosi nazwę pasma przepustowego, zaś pasmo, w którym sygnały podlegają silnemu tłumieniu nosi nazwę pasma zaporowego. Częstotliwość, która stanowi granicę pomiędzy pasmem przepustowym a pasmem zaporowym, nazywana jest częstotliwością graniczną. Filtr może mieć kilka częstotliwości granicznych. W zależności od położenia pasma przepustowego wyróżnia się następujące filtry:

- dolnoprzepustowe - pasmo przepustowe od częstotliwości  $f=0$  Hz do częstotliwości granicznej  $f_g$ ,
  - górnoprzepustowe - pasmo przepustowe od częstotliwości granicznej  $f_g$  do nieskończoności,
  - środkowoprzepustowe (pasmowe) - pasmo przepustowe od dolnej częstotliwości granicznej  $f_{g1}$  do górnej częstotliwości granicznej  $f_{g2}$ ,
  - środkowozaporowe (zaporowe) - pasmo zaporowe w przedziale częstotliwości od  $f_{g1}$  do  $f_{g2}$ .
- W zależności od elementów wykorzystanych do budowy filtrów wyróżnia się:
- filtry pasywne - zbudowane z samych elementów pasywnych:
    - filtry bezindukcyjne (RC) - zbudowane z rezystorów i kondensatorów,
    - filtry reaktancyjne (LC) - zbudowane z cewek i kondensatorów,
  - filtry aktywne - wykorzystują elementy aktywne (takie jak np. wzmacniacze operacyjne) i umożliwiają zaprojektowanie filtra o dowolnej charakterystyce częstotliwościowej.

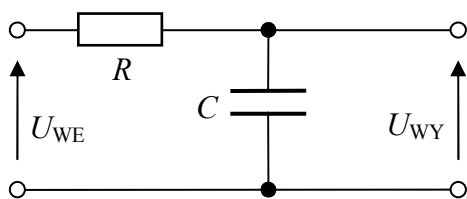
Podstawowe parametry charakteryzujące pasywny filtr częstotliwości to:

- 1) **współczynnik tłumienia ( $k$ )** - wielkość określająca, jaka część sygnału wejściowego jest przenoszona na wyjście filtra przy danej częstotliwości. Może on być określany na kilka sposobów, np. jako bezpośredni stosunek wartości napięć  $U_{WY}/U_{WE}$  lub w decybelach

$$k = -20 \log \frac{U_{WY}}{U_{WE}} \text{ [dB]}, \quad (17)$$

- 2) **przesunięcie fazowe  $\varphi$**  - różnica pomiędzy fazą napięcia na wyjściu filtra i fazą napięcia na jego wejściu wyrażone w stopniach lub radianach,
- 3) **częstotliwość graniczna ( $f_g$ )** - wartość częstotliwości oddzielająca pasmo przepustowe od pasma zaporowego. Typowo, za częstotliwość graniczną przyjmuje się taką wartość częstotliwości, przy której tłumienie wzrasta o 3 dB w stosunku do minimum tłumienia w paśmie przepustowym (tzw. „3 decybelowa częstotliwość graniczna”). Zgodnie ze wzorem (17) wzrost tłumienia o 3 dB odpowiada zmniejszeniu się wartości stosunku  $U_{WY}/U_{WE}$  do poziomu  $10^{-3/20} \approx 0,708$  maksymalnej wartości w paśmie przepustowym. Częstotliwość graniczna dla tłumienia 3 dB jest często utożsamiana z częstotliwością graniczną odpowiadającą zmniejszeniu się stosunku  $U_{WY}/U_{WE}$  do  $1/\sqrt{2} \approx 0,707$  wartości maksymalnej. Częstotliwość graniczna określona w ten sposób jest łatwiejsza do obliczenia gdy znamy wartości zastosowanych w filtrze elementów RLC.

### 3.3.1. Filtr dolnoprzepustowy RC



Rys. 2. Schemat prostego filtra dolnoprzepustowego RC.

Równanie (12) dla układu przedstawionego na rys. 2 przyjmuje postać

$$\frac{U_{WY}}{U_{WE}} = \frac{-j}{R - \frac{j}{2\pi fC}} \quad (18)$$

Wynikający ze wzoru (18) stosunek rzeczywistych napięć opisuje charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową filtra dolnoprzepustowego RC pokazaną na rys. 3

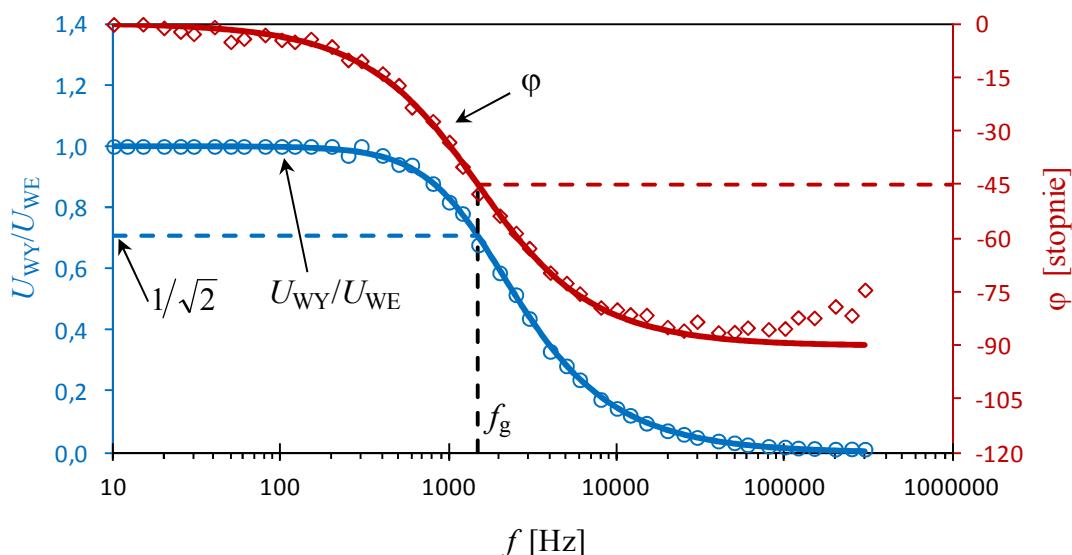
$$\frac{U_{WY}}{U_{WE}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi fRC)^2}} \quad (19)$$

Stąd częstotliwość graniczna filtra, przy której  $U_{WY}/U_{WE} = 1/\sqrt{2}$

$$f_g = \frac{1}{2\pi RC} \quad (20)$$

Charakterystykę fazowo-częstotliwościową filtra dolnoprzepustowego RC otrzymujemy podstawiając wyrażenie (18) do wzoru (15)

$$\varphi = \text{arctg}(-2\pi fRC) \quad (21)$$



Rys. 3. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa i fazowo-częstotliwościowa prostego filtra dolnoprzepustowego RC. Punkty oznaczają przykładowe wyniki pomiarów a linie ciągłe zależności teoretyczne (19) i (21).

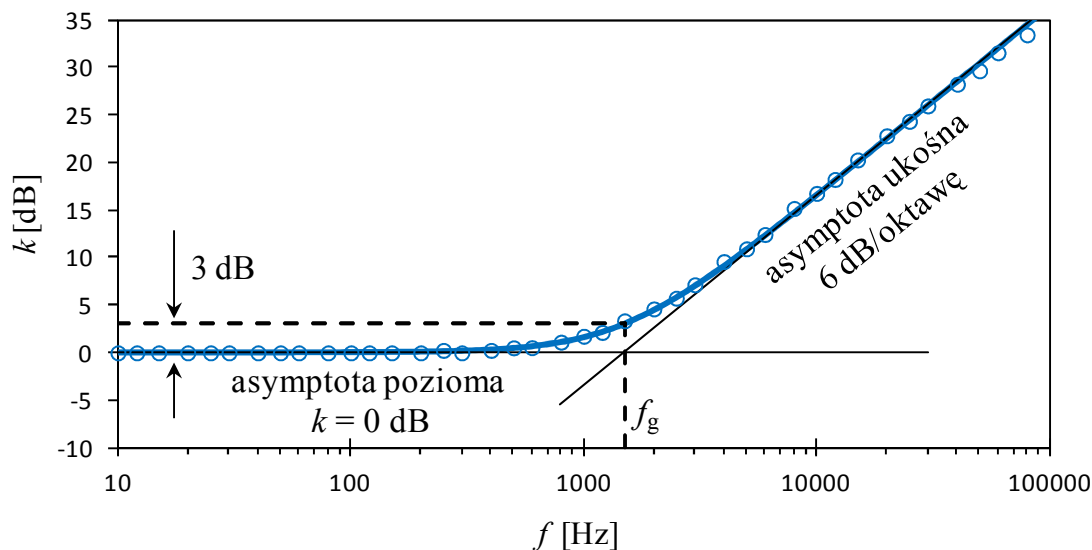
Ze wzoru (19) wynika, że wykres charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej filtra w układzie dwóch osi logarymicznych  $k$  [dB] oraz  $\log(f)$  ma dwie asymptoty:

dla  $f \rightarrow 0$  asymptota pozioma  $k = 0$  dB,

dla  $f \rightarrow \infty$  asymptota ukośna  $k = 20 \log(f) - 20 \log(f_g)$ .

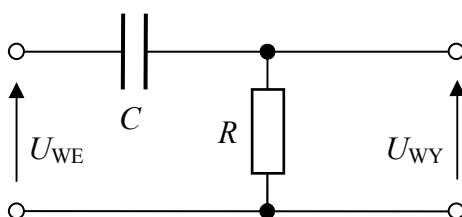
Punkt przecięcia asymptot przypada na opisaną wzorem (20) częstotliwość graniczną filtra  $f_g$ , dla której współczynnik tłumienia  $k \approx 3$  dB, a współczynnik przesunięcia fazowego  $\varphi = -45^\circ$ .

Nachylenie asymptoty ukośnej filtra podaje się w jednostkach dB/oktawę lub dB/dekadę. Oktawa oznacza stosunek częstotliwości 2:1 zaś dekada stosunek 10:1. Dla prostego filtra RC mamy odpowiednio 6 dB/oktawę lub 20 dB/dekadę (rys. 4).



Rys. 4. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa prostego filtra dolnoprzepustowego RC w skali logarymicznej na obu osiach.

### 3.3.2. Filtr górnoprzepustowy RC



Rys. 5. Schemat prostego filtra górnoprzepustowego RC.

Równanie (12) dla układu przedstawionego na rys. 5 przyjmuje postać

$$\frac{U_{WY}}{U_{WE}} = \frac{R}{R - \frac{j}{2\pi f C}} \quad (22)$$

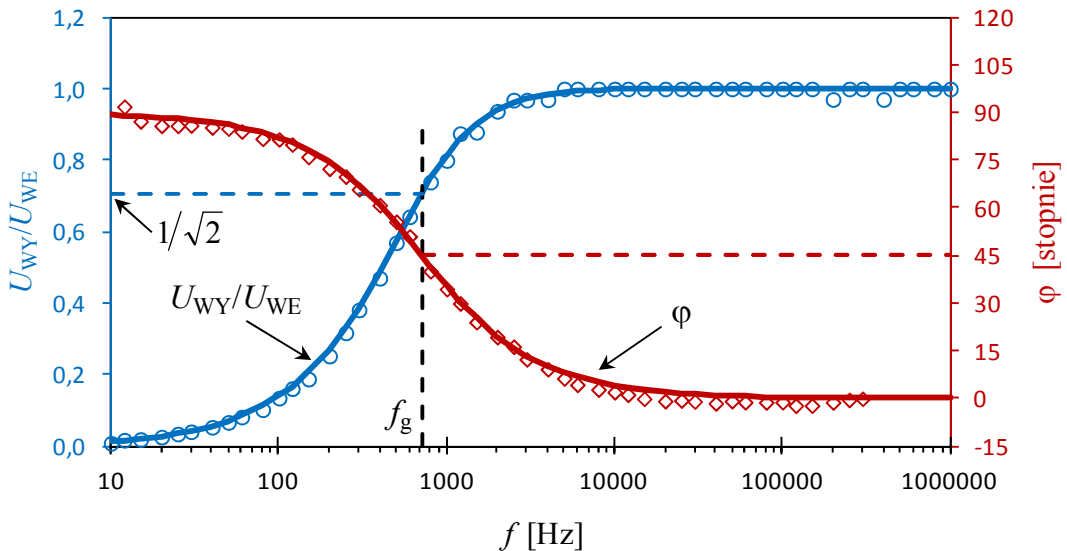
Wynikający ze wzoru (22) stosunek rzeczywistych napięć opisuje charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową filtra górnoprzepustowego RC pokazaną na rys. 6



$$\frac{U_{WY}}{U_{WE}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(2\pi fRC)^2}}} \quad (23)$$

Przesunięcie fazy otrzymujemy podstawiając wyrażenie (22) do wzoru (15)

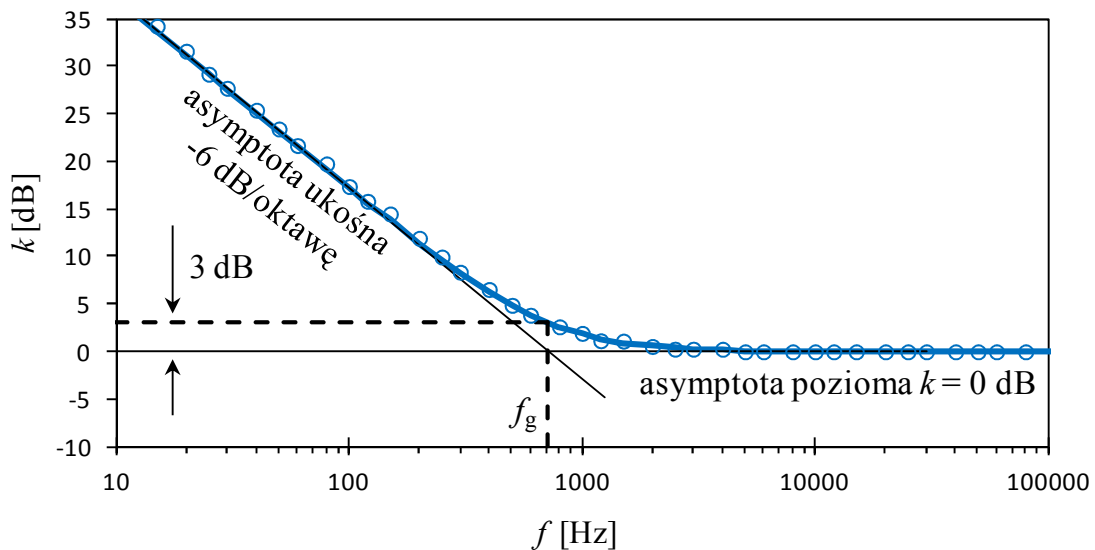
$$\varphi = \arctg \frac{1}{2\pi fRC} \quad (24)$$



Rys. 6. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa i fazowo-częstotliwościowa prostego filtra górnoprzepustowego RC. Punkty oznaczają przykładowe wyniki pomiarów a linie ciągłe zależności teoretyczne (23) i (24).

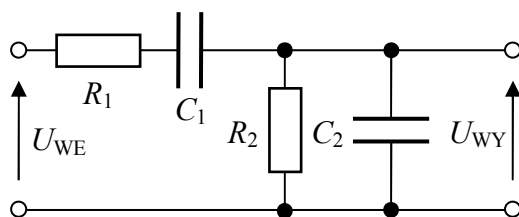
Ze wzoru (23) wynika, że wykres charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej filtra w układzie dwóch osi logarytmicznych  $k$  [dB] oraz  $\log(f)$  ma dwie asymptoty (rys. 7) przecinające się w częstotliwości granicznej  $f_g$  (20):

- dla  $f \rightarrow 0$  asymptota ukośna  $k = -20 \log(f) + 20 \log(f_g)$ ,
- dla  $f \rightarrow \infty$  asymptota pozioma  $k = 0$  dB.



Rys. 7. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa prostego filtra górnoprzepustowego RC w skali logarytmicznej na obu osiach.

### 3.3.3. Filtr Wienera RC



Rys. 8. Schemat filtra Wienera RC.

Równanie (12) dla układu przedstawionego na rys. 8 przyjmuje postać

$$\frac{U_{WY}}{U_{WE}} = \frac{(R_2^{-1} + j2\pi f C_2)^{-1}}{R_1 - \frac{j}{2\pi f C_1} + (R_2^{-1} + j2\pi f C_2)^{-1}}. \quad (25)$$

Stąd pokazany na rys. 9 stosunek rzeczywistego napięcia wyjściowego do napięcia wejściowego

$$\frac{U_{WY}}{U_{WE}} = \left[ \left( \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} + 1 \right)^2 + \left( 2\pi f R_1 C_2 - \frac{1}{2\pi f R_2 C_1} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (26)$$

oraz przesunięcie fazy napięć wprowadzane przez filtr

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{2\pi f R_2 C_1} - 2\pi f R_1 C_2}{\frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} + 1}. \quad (27)$$

Na podstawie wzoru (26) można wykazać, że omawiany układ jest filtrem środkowoprzepustowym i maksimum jego charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej przypada na tzw. częstotliwość środkową

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (28)$$

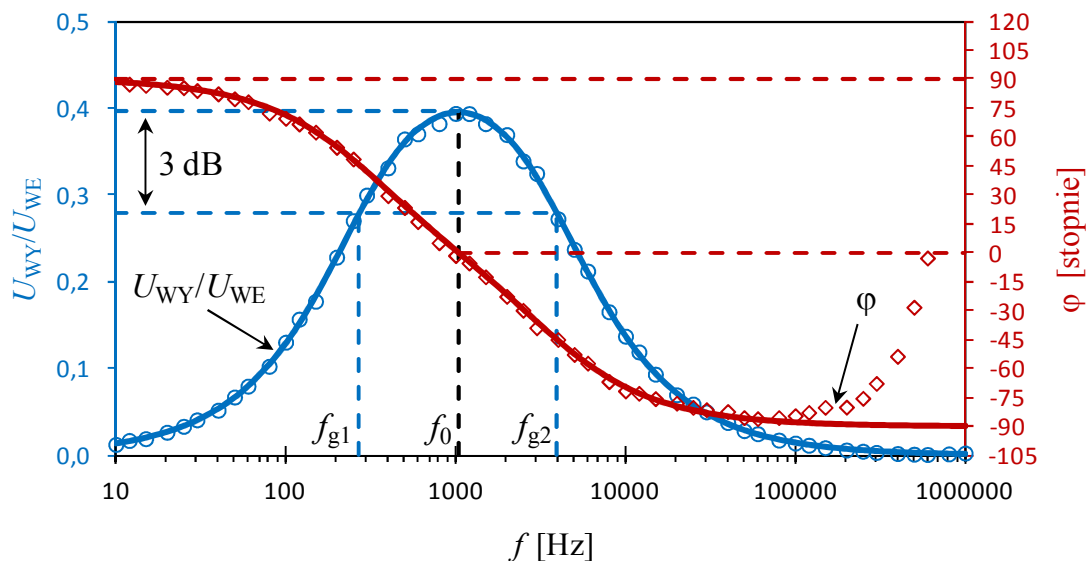
a wartość tego maksimum wynosi

$$\left( \frac{U_{WY}}{U_{WE}} \right)_{\max} = \left( \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} + 1 \right)^{-1}. \quad (29)$$

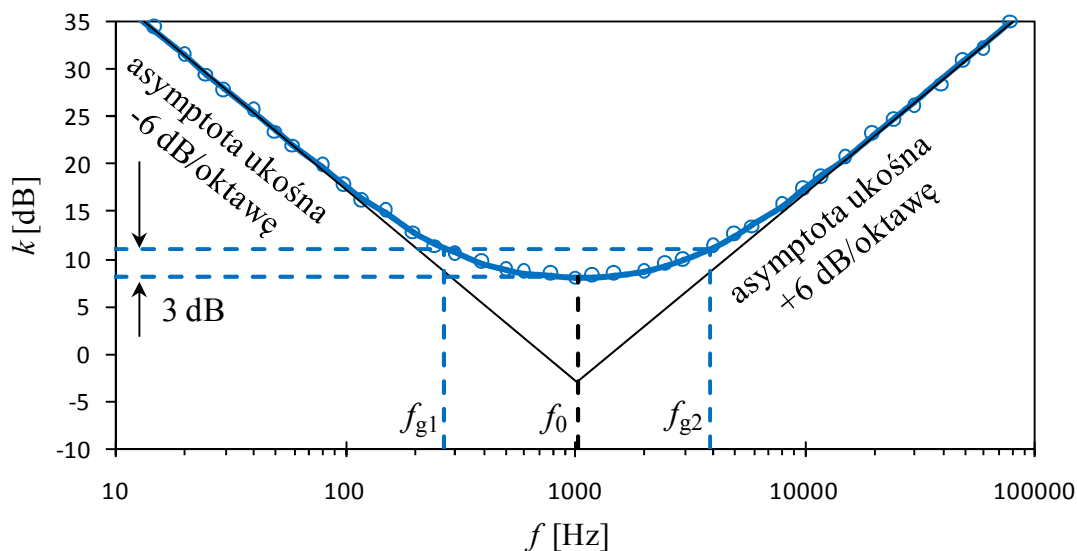
Ze wzoru (26) wynika również, że wykres charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej filtra Wienera RC w układzie dwóch osi logarymicznych  $k$  [dB] oraz  $\log(f)$  ma dwie asymptoty ukośne (rys. 10) przecinające się w punkcie odpowiadającym częstotliwości  $f_0$  (28):

$$\begin{aligned} \text{dla } f \rightarrow 0 \text{ asymptota ukośna} & \quad k = -20 \log(f) - 20 \log(2\pi R_2 C_1), \\ \text{dla } f \rightarrow \infty \text{ asymptota ukośna} & \quad k = +20 \log(f) + 20 \log(2\pi R_1 C_2). \end{aligned}$$

Charakterystyka fazowo-częstotliwościowa dana wzorem (27) przebiega od wartości  $+90^\circ$  dla  $f \rightarrow 0$ , poprzez  $0^\circ$  dla częstotliwości  $f_0$  i dąży do  $-90^\circ$  dla  $f \rightarrow \infty$  (rys. 9).



Rys. 9. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa i fazowo-częstotliwościowa filtra Wienera RC. Punkty oznaczają przykładowe wyniki pomiarów a linie ciągłe zależności teoretyczne (26) i (27).



Rys. 10. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa filtra Wienera RC w skali logarytmicznej na obu osiach.

Dobroć filtra  $Q$  określa się jako stosunek jego częstotliwości środkowej  $f_0$  do szerokości jego pasma

$$Q = \frac{f_0}{f_{g2} - f_{g1}}, \quad (30)$$

gdzie  $f_{g1}$  oraz  $f_{g2}$  są dolną i górną częstotliwością graniczną, przy których iloraz napięć  $U_{WY}/U_{WE}$  opada do poziomu  $1/\sqrt{2}$  wartości maksymalnej (patrz wzór 29), co odpowiada wzrostowi współczynnika tłumienia  $k$  o około 3 dB względem jego minimum. Wykorzystując wzory (26) i (29) można wykazać, że dobroć (30) omawianego filtra wynosi

$$Q = \sqrt{\frac{R_1 C_2}{R_2 C_1}} \left( \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} + 1 \right)^{-1} = \frac{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}{R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1}. \quad (31)$$

Zakres wartości  $Q$  możliwych do otrzymania ze wzoru (31) jest ograniczony do przedziału  $0 \div 0,5$ .

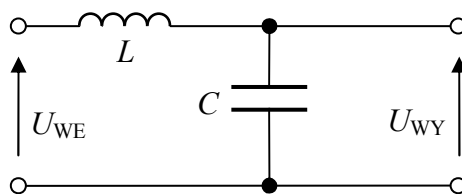
Posługując się symbolami wprowadzonymi we wzorach (28), (29) i (31) możemy teraz uprościć zapis wzoru (26) opisującego charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową oraz wzoru (27) opisującego charakterystykę fazowo-częstotliwościową

$$\frac{U_{WY}}{U_{WE}} = \left( \frac{U_{WY}}{U_{WE}} \right)_{\max} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 (f/f_0 - f_0/f)^2}}, \quad (32)$$

$$\varphi = \text{arctg}[Q(f_0/f - f/f_0)]. \quad (33)$$

### 3.3.4. Filtr dolnoprzepustowy LC

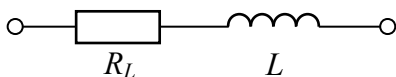
Schemat prostego filtra dolnoprzepustowego LC przedstawiono na rys. 11.



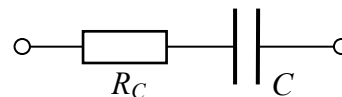
Rys. 11. Schemat prostego filtra dolnoprzepustowego LC.

#### Rezonans w obwodzie wejściowym filtra

W typowej rzeczywistej cewce występują znaczące straty energii spowodowane rezystancją szeregową cewki  $R_L$ . Uwzględnienie tego faktu ma zasadnicze znaczenie dla poprawnego modelowania charakterystyk rozważanego układu w pobliżu jego częstotliwości rezonansowej. W zakresie niskich częstotliwości (od 0 do częstotliwości rezonansowej) kondensator rzeczywisty możemy jeszcze z dobrym przybliżeniem rozważać jako kondensator idealny, natomiast w zakresie wysokich częstotliwości (powyżej częstotliwości rezonansowej) znaczenia nabiera rezystancja szeregową kondensatora.



Rys. 12. Schemat zastępczy cewki rzeczywistej.



Rys. 13. Schemat zastępczy kondensatora rzeczywistego.

Przyjmując schematy zastępcze cewki i kondensatora przedstawione na rys. 12 i 13 impedancję wejściową filtra możemy zapisać jako

$$\underline{Z}_{WE} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = R_L + R_C + j \left( 2\pi f L - \frac{1}{2\pi f C} \right) \quad (34)$$

a zespolony prąd płynący przez tę impedancję

$$\underline{I} = \underline{U}_{WE} / \underline{Z}_{WE} \quad (35)$$

Gdy częstotliwość  $f$  jest równa częstotliwości rezonansowej

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad (36)$$

i obciążenie wyjścia filtra jest pomijalnie małe, to reaktancje elementów  $L$  i  $C$  kompensują się a prąd w obwodzie  $I_0 = U_{WE}/R$  osiąga wartość maksymalną ograniczoną tylko przez rezystancję szeregową  $R = R_L + R_C$ . Ten sam prąd płynie także przez elementy  $L$  i  $C$ , zatem  $I_0 = U_C/X_C = U_L/X_L$ . Gdy rezystancja  $R$  jest niewielka, to napięcia na pojemności  $U_C$  i indukcyjności  $U_L$  mogą być nawet wielokrotnie większe od napięcia zasilającego  $U_{WE}$ . Stosunek tych napięć w rezonansie nazywa się *dobrocią obwodu RLC*

$$Q = \frac{U_L}{U_{WE}} = \frac{U_C}{U_{WE}} \quad (37)$$

lub

$$Q = \frac{2\pi f_0 L}{R} = \frac{1}{2\pi f_0 R C} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (38)$$

Jeżeli niezależnie od obciążenia źródła  $U_{WE} = \text{const.}$ , to prąd  $I$  płynący przy dowolnej częstotliwości  $f$  wygodnie jest wyrazić jako ułamek prądu rezonansowego  $I_0$  w postaci

$$\frac{I}{I_0} = \frac{R}{Z_{WE}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(f/f_0 - f_0/f)^2}} \quad (39)$$

Rozważając rodzinę zależności  $I/I_0$  od  $f/f_0$  daną wzorem (39) dla różnych wartości parametru  $Q$  widzimy, że wzrost wartości  $Q$  wiąże się ze zwiększeniem ostrości krzywej rezonansowej. Można wykazać, że dobroć zdefiniowana jako stosunek napięć (37) jest równoważna dobroci zdefiniowanej poprzednio wzorem (30), przy czym przez  $f_0$  należy teraz rozumieć częstotliwość (36) zaś przez  $f_{g1}$  i  $f_{g2}$  częstotliwości, przy których  $I/I_0 = 1/\sqrt{2}$ .

W praktyce generator funkcyjny o rezystancji wyjścia  $50\Omega$  nie jest w stanie utrzymać stałego napięcia na wejściu filtra, w którym  $R$  jest także rzędu kilkudziesięciu omów. Jeżeli gałka regulacji amplitudy w generatorze pozostaje w ustalonej pozycji, to przy częstotliwości  $f = f_0$  można zaobserwować największy spadek napięcia  $U_{WE}$ .

### Transmisja sygnału przez filtr dolnoprzepustowy LC

Równanie (12) dla filtra przedstawionego na rys. 11 ma postać

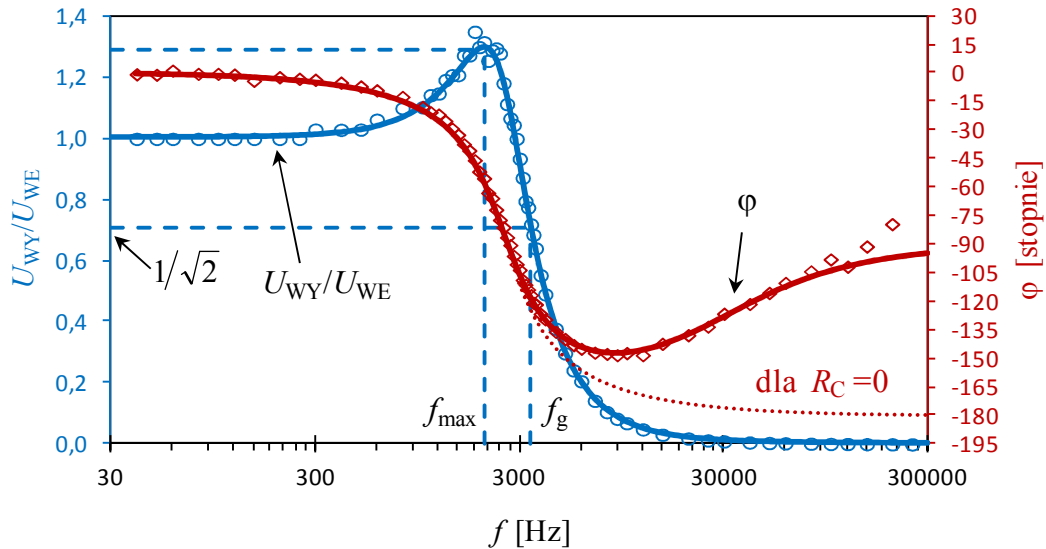
$$\frac{\underline{U}_{WY}}{\underline{U}_{WE}} = \frac{-\frac{j}{2\pi f C} + R_C}{j\left(2\pi f L - \frac{1}{2\pi f C}\right) + R_L + R_C} = \frac{(Qf_0/f)(-j + 2\pi f R_C C)}{jQ(f/f_0 - f_0/f) + 1} \quad (40)$$

Stąd pokazany na rys. 14 stosunek rzeczywistego napięcia wyjściowego do napięcia wejściowego

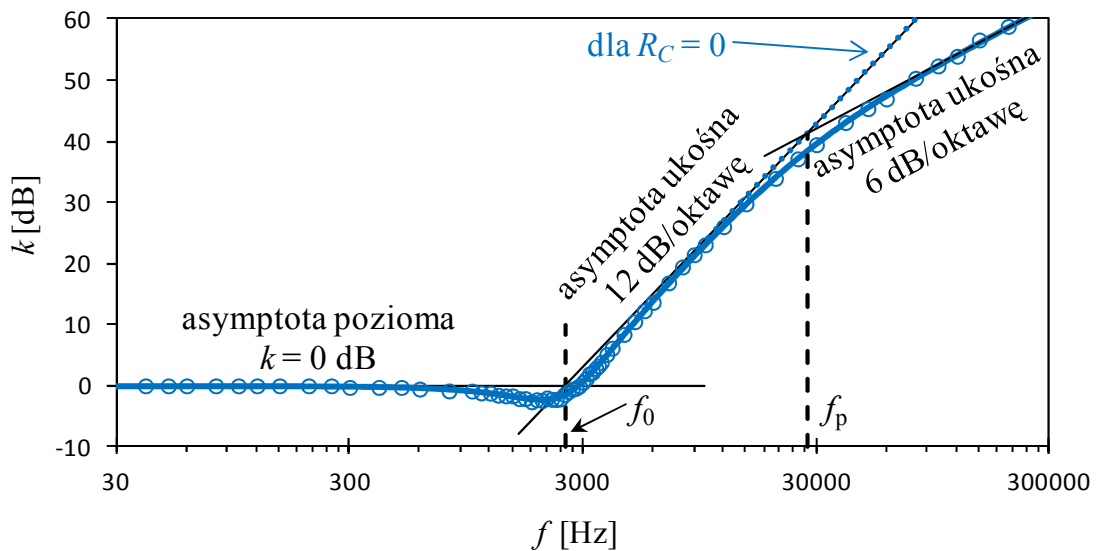
$$\frac{U_{WY}}{U_{WE}} = \frac{Qf_0 \sqrt{1 + (2\pi f R_C C)^2}}{f \sqrt{1 + Q^2(f/f_0 - f_0/f)^2}} \quad (41)$$

oraz przesunięcie fazy napięcia wyjściowego względem wejściowego

$$\varphi = -\arccos \frac{-Q(f/f_0 - f_0/f) + 2\pi f R_C C}{\sqrt{1 + Q^2(f/f_0 - f_0/f)^2} \sqrt{1 + (2\pi f R_C C)^2}}. \quad (42)$$



Rys. 14. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa i fazowo-częstotliwościowa prostego filtra dolnoprzepustowego LC. Punkty oznaczają przykładowe wyniki pomiarów a linie ciągłe zależności teoretyczne (41) i (42).



Rys. 15. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa prostego filtra dolnoprzepustowego LC w skali logarytmicznej na obu osiach.

Ze wzoru (41) wynika, że w układzie dwóch osi logarytmicznych  $k$  [dB] oraz  $\log(f)$  wykres charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej filtra z idealnym kondensatorem (w którym  $R_C = 0$ ) ma dwie asymptoty: poziomą i 12 dB/oktawę (rys. 15). W przypadku rzeczywistego filtra ( $R_C > 0$ ) zakres niemal stałego nachylenia charakterystyki 12 dB/oktawę = 40 dB/dekadę jest jednak ograniczony i przy odpowiednio wysokich częstotliwościach, dla których  $X_C \ll R_C$  charakterystyka dąży do asymptoty 6 dB/oktawę = 20 dB/dekadę:

$$\begin{aligned} \text{dla } f \rightarrow 0 \text{ asymptota pozioma} & \quad k = 0 \text{ dB,} \\ \text{dla } R_C \ll X_C \ll X_L \text{ asymptota ukośna} & \quad k = 40 \log(ff_0), \\ \text{dla } f \rightarrow \infty \text{ asymptota ukośna} & \quad k = 20 \log(f) - 20 \log(R_C/2\pi L). \end{aligned} \quad (43)$$

Asymptoty 0 dB oraz 40 dB/dekadę przecinają się przy częstotliwości rezonansowej  $f_0$  (36), natomiast asymptoty o nachyleniach 40 dB/dekadę i 20 dB/dekadę przecinają się przy częstotliwości  $f_p$

$$f_p = \frac{1}{2\pi R_C C} \quad (44)$$

odpowiadającej zrównaniu się reaktancji kondensatora  $1/2\pi f_p C$  z jego rezystancją  $R_C$ .

Charakterystyka fazowo-częstotliwościowa dana wzorem (42) przebiega od wartości  $0^\circ$  dla  $f \rightarrow 0$  i następnie dla filtra z idealnym kondensatorem ( $R_C = 0$ ) przechodzi przez  $-90^\circ$  przy częstotliwości  $f_0$  i dąży do  $-180^\circ$  dla  $f \rightarrow \infty$  (rys. 14). Rezystancja  $R_C > 0$  powoduje jednak, że przesunięcie fazy osiąga pewne minimum leżące w przedziale  $-180^\circ \div -90^\circ$  i rośnie przy dalszym wzroście częstotliwości.

Stosunek napięć (41) osiąga wartości większe od jedności w otoczeniu częstotliwości  $f_0$ . Zauważmy jednak, że prąd  $I$  płynący w obwodzie rezonansowym przekłada się na napięcie  $U_{WY}$  poprzez element  $C$  o impedancji malejącej ze wzrostem częstotliwości, tak więc maksimum stosunku napięć  $U_{WY}/U_{WE}$  przypada dla częstotliwości  $f_{max}$  mniejszej niż częstotliwość  $f_0$  odpowiadająca maksimum prądu  $I$ . Duży stopień skomplikowania zależności  $U_{WY}/U_{WE}$  od  $f$  utrudnia teoretyczne wyznaczenie dokładnej częstotliwości  $f_{max}$ . Zauważmy jednak, że w pobliżu częstotliwości  $f_{max}$  możemy z bardzo dobrym przybliżeniem pominąć wyraz zawierający  $R_C$  we wzorze (41), co umożliwia analityczne wyprowadzenie związku dla  $R_C = 0$

$$f_{max} \approx f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}. \quad (45)$$

Maksymalna wartość stosunku napięć dla  $f = f_{max}$  wynosi

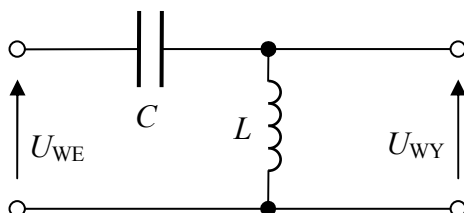
$$\left( \frac{U_{WY}}{U_{WE}} \right)_{max} \approx \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}. \quad (46)$$

Stąd, dla zmierzonej wartości  $(U_{WY}/U_{WE})_{max}$ , dobrze można obliczyć jako

$$Q \approx \left( \frac{U_{WY}}{U_{WE}} \right)_{max} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{U_{WY}}{U_{WE}} \right)_{max}^{-2}}}. \quad (47)$$

### 3.3.5. Filtr górnoprzepustowy LC (do części rozszerzonej)

Schemat prostego filtra górnoprzepustowego LC przedstawiono na rys. 16.



Rys. 16. Schemat prostego filtra górnoprzepustowego LC.

Przyjmując jak poprzednio schematy zastępcze cewki i kondensatora przedstawione na rys. 12 i 13 w mocy pozostają wzory opisujące: impedancję wejściową filtra (34), częstotliwość  $f_0$  (36) odpowiadającą maksimum prądu, dobroć  $Q$  (37) i (38) oraz iloraz prądów  $I/I_0$  (39).

Równanie (12) dla rozważanego obwodu ma postać

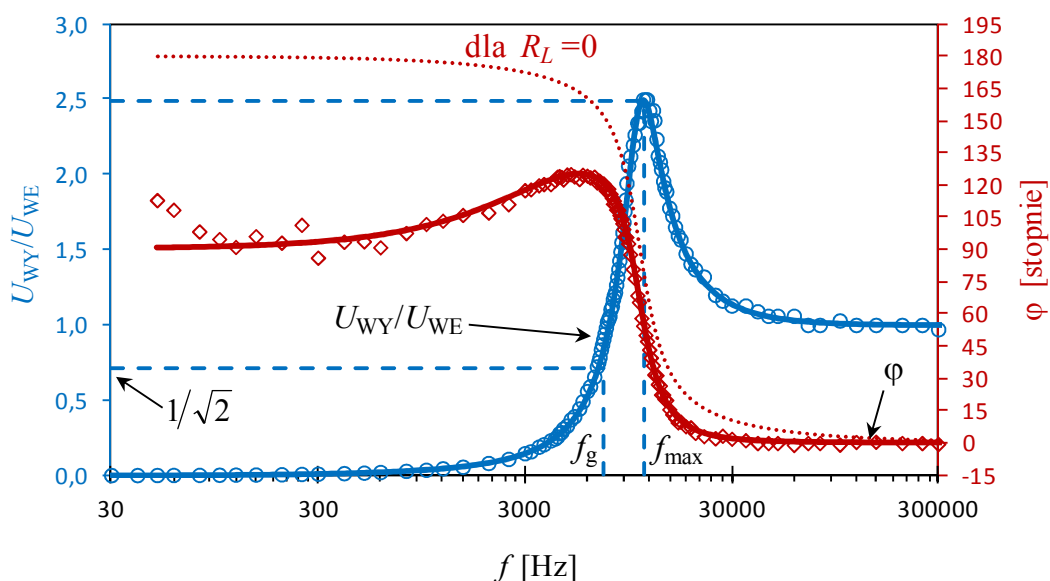
$$\frac{U_{WY}}{U_{WE}} = \frac{j 2\pi f L + R_L}{j \left( 2\pi f L - \frac{1}{2\pi f C} \right) + R_L + R_C} = \frac{(Qf/f_0)(j + R_L/2\pi f L)}{j Q(f/f_0 - f_0/f) + 1} \quad (48)$$

Stąd stosunek rzeczywistego napięcia wyjściowego do napięcia wejściowego

$$\frac{U_{WY}}{U_{WE}} = \frac{Qf \sqrt{1 + (R_L/2\pi f L)^2}}{f_0 \sqrt{1 + Q^2 (f/f_0 - f_0/f)^2}} \quad (49)$$

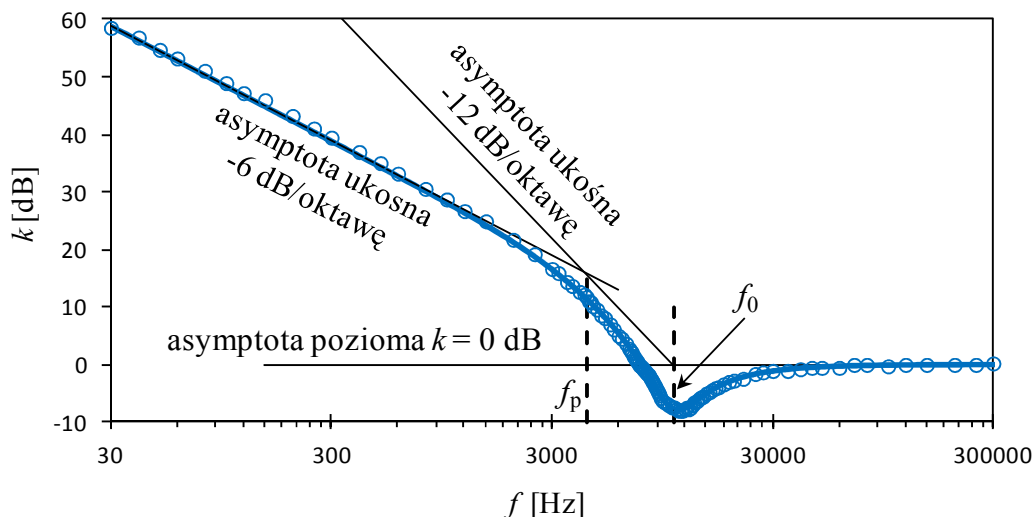
oraz przesunięcie fazy napięcia wyjściowego względem wejściowego

$$\varphi = \arccos \frac{Q(f/f_0 - f_0/f) + R_L/2\pi f L}{\sqrt{1 + Q^2 (f/f_0 - f_0/f)^2} \sqrt{1 + (R_L/2\pi f L)^2}} \quad (50)$$



Rys. 17. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa i fazowo-częstotliwościowa prostego filtra górnoprzepustowego LC. Punkty oznaczają przykładowe wyniki pomiarów a linie ciągłe zależności teoretyczne (49) i (50).





Rys. 18. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa prostego filtra górnoprzepustowego LC w skali logarytmicznej na obu osiach.

We współrzędnych  $k$  [dB] oraz  $\log(f)$  charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa opisana wzorem (49) ma dwie asymptoty (poziomą i  $-12$  dB/oktawę) w przypadku filtra z idealną cewką  $R_L = 0$ . W rzeczywistym układzie, gdzie  $R_L > 0$ , rezystancja cewki  $R_L$  dominuje jednak nad reaktancją  $X_L = 2\pi fL$  dla odpowiednio małych częstotliwości i układ pracuje wtedy jak filtr górnoprzepustowy RC z charakterystyczną asymptotą  $-6$  dB/oktawę  $= -20$  dB/dekadę (rys. 18):

$$\begin{aligned} \text{dla } f \rightarrow 0 \text{ asymptota ukośna} & \quad k = -20 \log(f) - 20 \log(2\pi R_L C), \\ \text{dla } R_L \ll X_L \ll X_C \text{ asymptota ukośna} & \quad k = -40 \log(f/f_0), \\ \text{dla } f \rightarrow \infty \text{ asymptota pozioma} & \quad k = 0 \text{ dB}. \end{aligned}$$

Asymptoty o nachyleniach  $-20$  dB/dekadę oraz  $-40$  dB/dekadę przecinają się przy częstotliwości  $f_p$

$$f_p = \frac{R_L}{2\pi L} \quad (51)$$

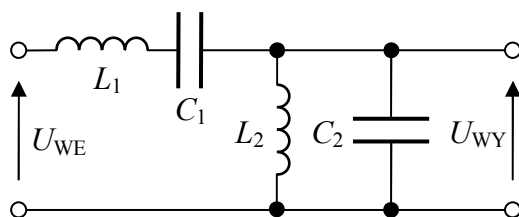
odpowiadającej zrównaniu się reaktancji cewki  $2\pi Lf_p$  z jej rezystancją  $R_L$ , natomiast asymptoty  $-40$  dB/dekadę i  $0$  dB przecinają się w częstotliwości rezonansowej  $f_0$  (36).

Charakterystyka fazowo-częstotliwościowa dana wzorem (50) w przypadku układu z idealną cewką ( $R_L = 0$ ) maleje monotonicznie od  $180^\circ$  dla  $f \rightarrow 0$  do  $0^\circ$  dla  $f \rightarrow \infty$  (rys. 17). Dodatkowa rezystancja  $R_L > 0$  powoduje jednak, że charakterystyka rozpoczyna się od  $90^\circ$  dla  $f \rightarrow 0$ , rośnie do pewnej maksymalnej wartości mniejszej od  $180^\circ$  i następnie opada do  $0^\circ$  dla  $f \rightarrow \infty$ .

UWAGA: w układzie badanym w tym ćwiczeniu relacja  $R_L \ll X_L \ll X_C$  nie jest dobrze spełniona w żadnym zakresie częstotliwości, dlatego teoretyczna asymptota  $-12$  dB/oktawę widoczna na rys. 18 jest wyraźnie przesunięta względem punktów pomiarowych. Wynik ten dobrze obrazuje trudności napotymane podczas projektowania filtrów LC o nachyleniu charakterystyki  $-12$  dB/oktawę obowiązującym w szerokim zakresie częstotliwości. W praktyce zadanie to jest częściej realizowane przy wykorzystaniu aktywnych filtrów RC.

Ponieważ prąd  $I$  płynący w obwodzie rezonansowym przekłada się na napięcie  $U_{WY}$  na elemencie o impedancji zespolonej  $R_L + j2\pi fL$ , to maksimum wzmocnienia napięcia  $U_{WY}/U_{WE}$  przypada dla częstotliwości  $f_{max}$  większej od częstotliwości  $f_0$  odpowiadającej maksimum  $I$ . Ponieważ nie możemy z dobrym przybliżeniem zaniedbać wpływu  $R_L$  nawet przy częstotliwości  $f_{max}$ , wyznaczenie jej teoretycznej wartości jest bardziej skomplikowane niż w przypadku filtra dolnoprzepustowego LC i wykracza poza zakres tego ćwiczenia.

### 3.3.6. Filtr Wienera LC (do części rozszerzonej)



Rys. 19. Schemat filtra Wienera LC.

Równanie (12) dla filtra Wienera LC przedstawionego na rys. 19, z uwzględnieniem schematów zastępczych cewek i kondensatorów jak na rys. 12 i 13, przyjmuje postać

$$\frac{U_{WY}}{U_{WE}} = \frac{[(j2\pi fL_2 + R_{L2})^{-1} + j2\pi fC_2]^{-1}}{j\left(2\pi fL_1 - \frac{1}{2\pi fC_1}\right) + R_{L1} + [(j2\pi fL_2 + R_{L2})^{-1} + j2\pi fC_2]^{-1}}. \quad (52)$$

Równanie to jest dość trudne do analizy, dlatego dokładna analiza ilościowa zostanie przedstawiona tylko dla przypadku układu zbudowanego z idealnych cewek i kondensatorów. Podstawienie  $R_{L1} = R_{L2} = R_{C1} = R_{C2} = 0$  do wzoru (52) umożliwia uproszczenie go do postaci

$$\frac{U_{WY}}{U_{WE}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{L_1 C_2}{L_2 C_1} \left(\frac{f}{f_1} - \frac{f_1}{f}\right) \left(\frac{f_2}{f} - \frac{f}{f_2}\right)} + 1}, \quad (53)$$

gdzie  $f_1$  i  $f_2$  są częstotliwościami rezonansowymi

$$f_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}}, \quad f_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2 C_2}}. \quad (54)$$

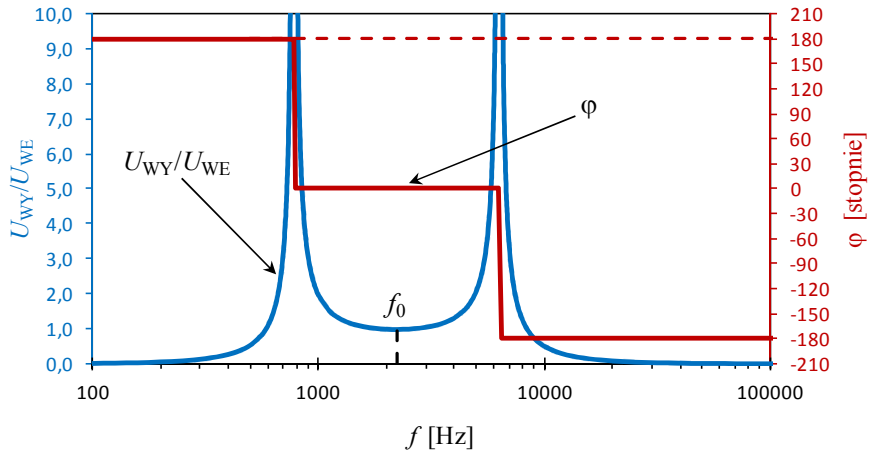
Wyrażenie  $\underline{U}_{WY}/\underline{U}_{WE}$  dane wzorem (53) nie zawiera części urojonej i przyjmuje wartości dodatnie w otoczeniu częstotliwości  $f_0$  oraz wartości ujemne dla pozostałych częstotliwości. Przykładowa zależność modułu wyrażenia (53) od  $f$  została przedstawiona na rys. 20. Niezależnie od wyboru wartości  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $C_1$  i  $C_2$  moduł ten osiąga zawsze jedno minimum lokalne przy częstotliwości

$$f_0 = \sqrt{f_1 f_2}, \quad (55)$$

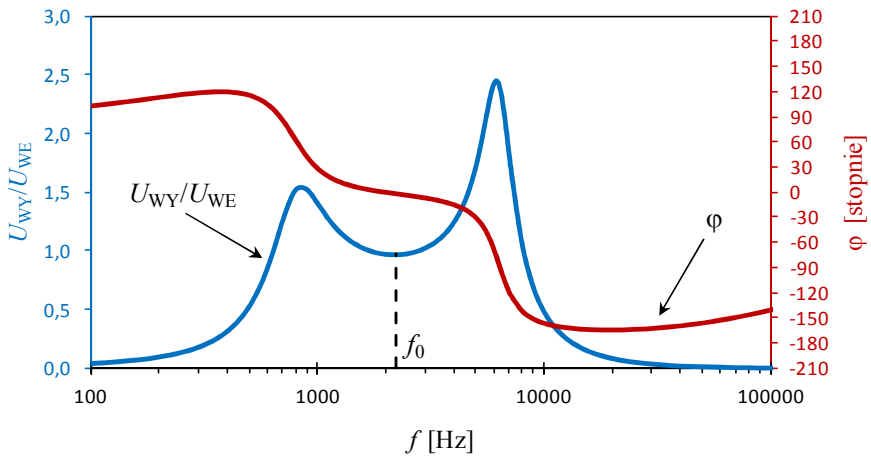
które otoczone jest dwoma maksimami  $U_{WY}/U_{WE} \rightarrow \infty$ . Maksima te występują przy częstotliwościach nie pokrywających się z  $f_1$  ani  $f_2$ .

Przesunięcie fazy napięć wynikające z wyrażenia  $\underline{U}_{WY}/\underline{U}_{WE}$  danego wzorem (53) przyjmuje tylko wartości  $\varphi = 0^\circ$  w otoczeniu częstotliwości  $f_0$  albo  $\varphi = \pm 180^\circ$  (rys. 20). Wartości  $+180^\circ$  oraz  $-180^\circ$  są nieodróżnialne w pomiarach, jednakże możliwe do odróżnienia na podstawie teoretycznej analizy właściwości idealnych cewek i kondensatorów.

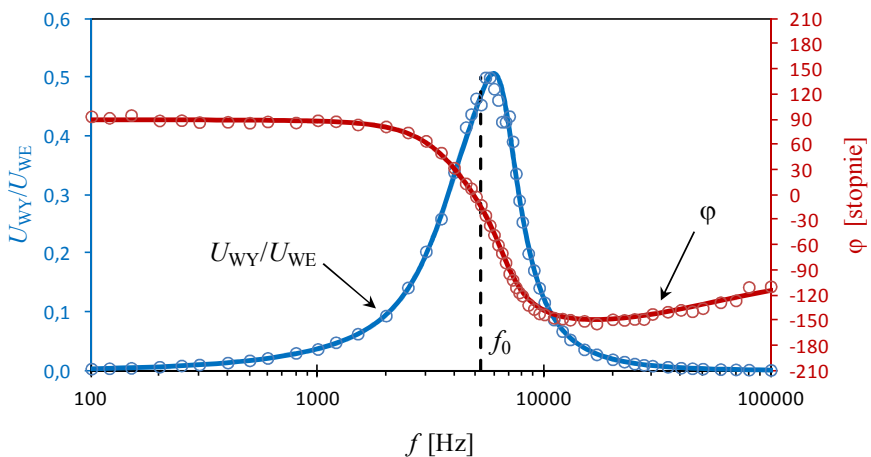
Uwzględnienie większych od zera wartości  $R_{L1}$ ,  $R_{L2}$ ,  $R_{C1}$ ,  $R_{C2}$  powoduje, że wyrażenie (52) staje się zespolone. Stopniowy wzrost wartości tych rezystancji początkowo prowadzi do obniżania się wysokości maksimów  $U_{WY}/U_{WE}$  oraz złagodzenia gwałtownych przebiegów wartości  $\varphi$  (rys. 21). Dalszy wzrost wartości rezystancji lub wybór innych wartości  $L$  i  $C$  może doprowadzić do zaniku maksimów oraz przejścia minimum przy częstotliwości zbliżonej do  $f_0$  w pojedyncze maksimum (rys. 22). W układach dostępnych w pracowni możliwe jest wystąpienie obu tych przypadków przy różnych ustawieniach przełącznika Pł.2.



Rys. 20. Przykład teoretycznej charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej i fazowo-częstotliwościowej filtra Wiena LC zbudowanego z idealnych cewek i kondensatorów.



Rys. 21. Przykład teoretycznej charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej i fazowo-częstotliwościowej filtra Wiena LC przy małych wartościach rezystancji szeregowych cewek i kondensatorów w porównaniu do ich reaktancji w otoczeniu częstotliwości  $f_0$ .



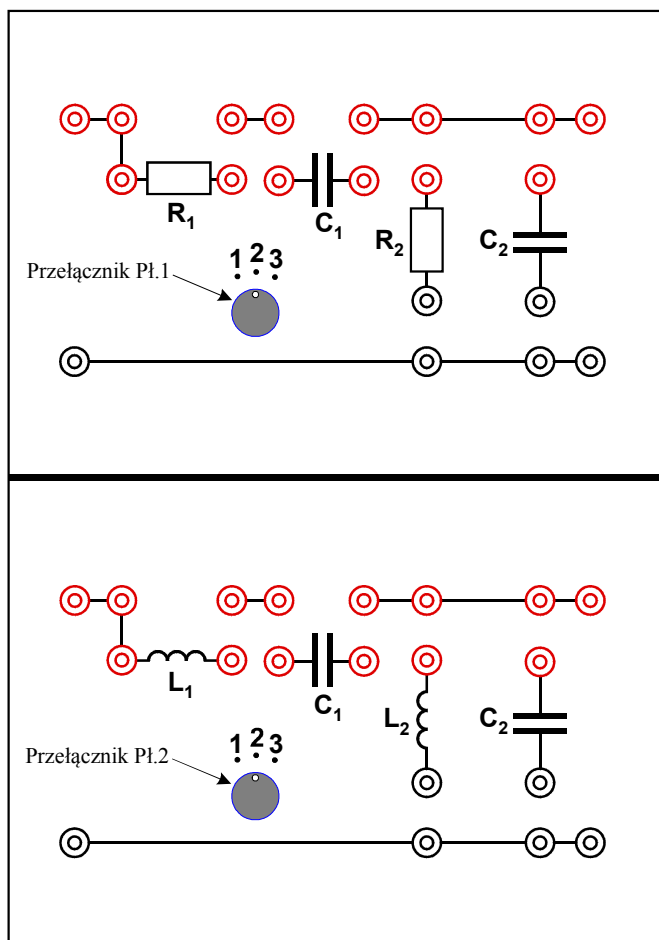
Rys. 22. Przykład charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej i fazowo-częstotliwościowej filtra Wiena LC przy dużych wartościach rezystancji szeregowych cewek. Punkty oznaczają wyniki pomiarów a linie ciągłe zależności teoretyczne.

## 4. Dostępna aparatura

### 4.1. Moduł doświadczalny

Moduł doświadczalny składa się z dwóch części (rys. 23):

- górnej zawierającej elementy  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  z gniazdami do połączeń filtrów typu RC oraz przełącznik Pł.1 umożliwiający wybór wartości  $C_1$  i  $C_2$  (podane w tabeli 2),
- dolnej zawierającej elementy  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  z gniazdami do połączeń filtrów typu LC oraz przełącznik Pł.2 umożliwiający wybór wartości  $L_2$ ,  $C_1$  i  $C_2$  (podane w tabeli 3).



Rys. 23. Panel czołowy modułu doświadczalnego.

### 4.2. Generator funkcyjny

Generator funkcyjny DF1641B [7].

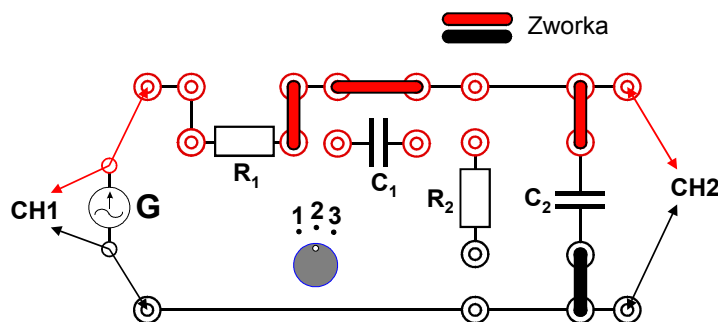
### 4.3. Oscyloskop

Do obserwacji przebiegów na wejściu i wyjściu badanych filtrów wykorzystuje się dwukanałowy oscyloskop cyfrowy SIGLENT SDS1052DL [7]. Oscyloskop ten umożliwia także wyświetlanie wartości liczbowych napięć, przesunięć fazowych i częstotliwości.

## 5. Przebieg doświadczenia

### 5.1. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa i fazowo-częstotliwościowa filtra dolnoprzepustowego RC – część podstawowa

1. Za pośrednictwem trójnika BNC połączyć wyjście OUTPUT generatora **G** jednocześnie z wejściem dzielnika napięcia RC jak na rys. 24 i z wejściem kanału CH1 oscyloskopu. Oscyloskop połączyć z generatorem przewodem BNC-BNC, zaś układ pomiarowy przewodem BNC-wtyki bananowe.
2. Wyjście układu pomiarowego (dzielnika napięcia RC) połączyć przewodem BNC-wtyki bananowe z kanałem CH2 oscyloskopu jak na rys. 24.
3. Po uzyskaniu zezwolenia włączyć zasilanie urządzeń. Przełącznik Pł.1 na panelu modułu doświadczalnego ustawić według zaleceń prowadzącego ćwiczenia.
4. W generatorze wybrać przebieg sinusoidalny i ustawić wstępnie częstotliwość 30 Hz oraz napięcie 20,0 V<sub>p-p</sub> kierując się wskazaniem wyświetlaczy wbudowanych w generator.
5. Przed przystąpieniem do pracy z oscyloskopem cyfrowym zalecane jest naciśnięcie przycisku DEFAULT SETUP w celu przywrócenia domyślnych ustawień oscyloskopu. Następnie ustawić oscyloskop do pracy w trybie dwukanałowym (zapalone oba przyciski CH1 i CH2) z trybem sprzężenia AC w każdym kanale. Po naciśnięciu przycisku TRIG MENU wybrać wyzwalanie sygnałem doprowadzonym do wejścia kanału CH1. Ustawić optymalny obraz obu przebiegów.
6. Nacisnąć przycisk MEASURE w celu wyświetlenia na ekranie oscyloskopu menu mierzonych parametrów. Następnie używając przycisków z prawej strony ekranu należy zmienić ustawienia domyślne tak, by wyświetlić: napięcie skuteczne V<sub>rms</sub> w kanale CH1 ( $U_{WE}$  w tabeli 1), V<sub>rms</sub> w kanale CH2 ( $U_{WY}$ ) oraz różnicę faz CH1-CH2 ( $\varphi_{CH1-CH2}$ ).
7. Zbadać zmiany napięcia wejściowego  $U_{WE}$ , wyjściowego  $U_{WY}$  oraz różnicy faz  $\varphi_{CH1-CH2}$  w funkcji częstotliwości  $f$  w przedziale 30 Hz ÷ 300 kHz. Optymalny krok zmiany częstotliwości powinien rosnać mniej więcej proporcjonalnie do częstotliwości już osiągniętej. W przypadku stwierdzenia gwałtownych zmian mierzonych wielkości należy zagęścić pomiary.  
**UWAGA:** Zmieniając częstotliwość należy pamiętać o korygowaniu nastaw oscyloskopu, tak by zawsze uzyskiwać optymalne obrazy przebiegów przed wykonaniem pomiaru.
8. Otrzymane wyniki pomiarów  $f$ ,  $U_{WE}$ ,  $U_{WY}$ ,  $\varphi_{CH1-CH2}$ , wykorzystane nastawy współczynników wzmocnienia oscyloskopu V/DIV oraz pozycję przełącznika Pł.1 zapisać w tabeli 1.



Rys. 24. Schemat połączeń do wyznaczenia charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej i fazowo-częstotliwościowej filtra dolnoprzepustowego RC.

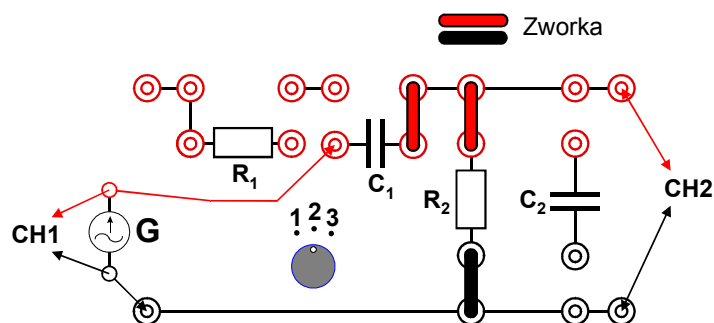
Tabela 1. Wyniki pomiarów dla filtra ..... przy przełączniku P1.1/P1.2 ustawionym w pozycji .....

$f$		$\Delta f$	$U_{WE}$		$\Delta U_{WE}$	$U_{WY}$		$\Delta U_{WE}$	$\Phi_{CH1-CH2}$	$\Phi_{WY-WE}$	$U_{WY}/U_{WE}$	$\Delta(U_{WY}/U_{WE})$	$k$	$\Delta k$
[Hz]	[kHz]	[kHz]	[V/DIV]	[V]	[V]	[V/DIV]	[V]	[V]	[stopnie]	[stopnie]			[dB]	[dB]

UWAGA: podczas pomiarów należy notować tylko niezbędne dane:  $f$  [Hz albo kHz],  $U_{WE}$  [V/DIV],  $U_{WE}$  [V],  $U_{WY}$  [V/DIV],  $U_{WY}$  [V],  $\Phi_{CH1-CH2}$  [stopnie].  
 Pozostałe wyniki będą obliczane podczas przygotowywania raportu (patrz rozdział 6, pkt. 5).

## 5.2. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa i fazowo-częstotliwościowa filtra górnoprzepustowego RC – część podstawowa

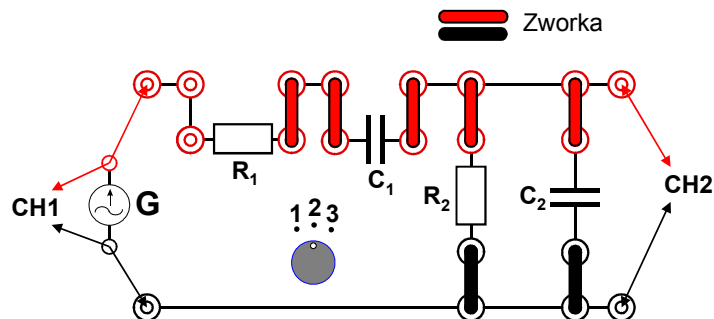
1. Za pośrednictwem trójnika BNC połączyć wyjście OUTPUT generatora **G** jednocześnie z wejściem dzielnika napięcia RC jak na rys. 25 i z kanałem CH1 oscyloskopu. Oscyloskop połączyć z generatorem przewodem BNC-BNC, zaś układ pomiarowy przewodem BNC-wtyki bananowe.
2. Wyjście układu pomiarowego (dzielnika napięcia RC) połączyć przewodem BNC-wtyki bananowe z kanałem CH2 oscyloskopu jak na rys. 25.
3. Przygotować nowy egzemplarz tabeli 1 z odpowiednim opisem badanego filtra.
4. Pomiary przeprowadzić analogicznie jak wcześniej w punktach 3-8 rozdziału 5.1.



Rys. 25. Schemat połączeń do wyznaczenia charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej i fazowo-częstotliwościowej filtra górnoprzepustowego RC.

### 5.3. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa i fazowo-częstotliwościowa filtra Wienera RC – część podstawowa

1. Za pośrednictwem trójnika BNC połączyć wyjście OUTPUT generatora **G** jednocześnie z wejściem dzielnika napięcia RC jak na rys. 26 i z kanałem CH1 oscyloskopu. Oscyloskop połączyć z generatorem przewodem BNC-BNC, zaś układ pomiarowy przewodem BNC-wtyki bananowe.
2. Wyjście układu pomiarowego (dzielnika napięcia RC) połączyć przewodem BNC-wtyki bananowe z kanałem CH2 oscyloskopu jak na rys. 26.
3. Przygotować nowy egzemplarz tabeli 1 z odpowiednim opisem badanego filtra.
4. Pomiary przeprowadzić analogicznie jak wcześniej w punktach 3-8 rozdziału 5.1.  
**UWAGA:** należy zwrócić szczególną uwagę na zagęszczenie pomiarów w pobliżu częstotliwości, dla której  $U_{WY}/U_{WE}$  osiąga maksimum natomiast  $\varphi_{CH1-CH2} = 0^\circ$ .

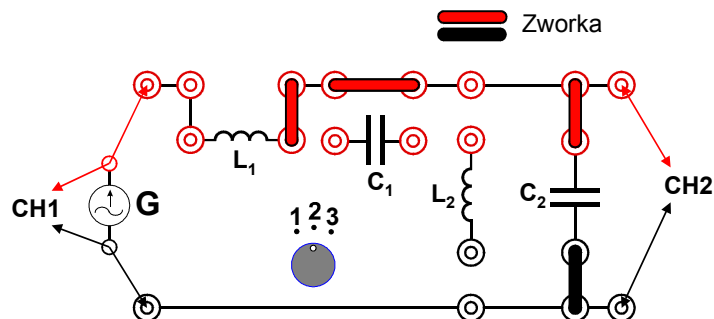


Rys. 26. Schemat połączeń do wyznaczenia charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej i fazowo-częstotliwościowej filtra Wienera RC.



#### 5.4. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa i fazowo-częstotliwościowa filtra dolnoprzepustowego LC – część podstawowa

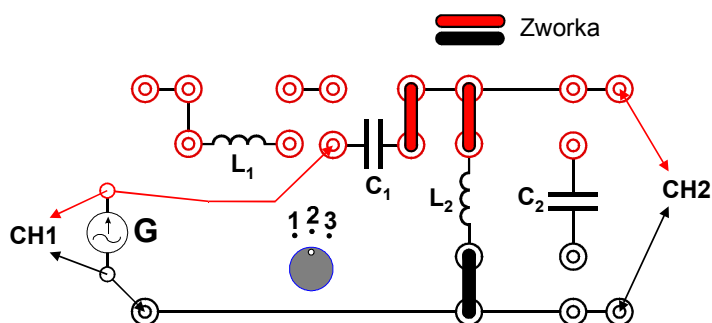
1. Za pośrednictwem trójnika BNC połączyć wyjście OUTPUT generatora **G** jednocześnie z wejściem dzielnika napięcia LC jak na rys. 27 i z kanałem CH1 oscyloskopu. Oscyloskop połączyć z generatorem przewodem BNC-BNC, zaś układ pomiarowy przewodem BNC-wtyki bananowe.
2. Wyjście układu pomiarowego (dzielnika napięcia LC) połączyć przewodem BNC-wtyki bananowe z kanałem CH2 oscyloskopu jak na rys. 27.
3. Przygotować nowy egzemplarz tabeli 1 z odpowiednim opisem badanego filtra.
4. Pomiary przeprowadzić analogicznie jak wcześniej w punktach 3-8 rozdziału 5.1.  
**UWAGA:** należy zwrócić szczególną uwagę na zagęszczenie pomiarów w pobliżu częstotliwości, dla której  $U_{WY}/U_{WE}$  osiąga maksimum.



Rys. 27. Schemat połączeń do wyznaczenia charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej i fazowo-częstotliwościowej filtra dolnoprzepustowego LC.

## 5.5. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa i fazowo-częstotliwościowa filtra górnoprzepustowego LC – część rozszerzona

1. Za pośrednictwem trójnika BNC połączyć wyjście OUTPUT generatora **G** jednocześnie z wejściem dzielnika napięcia LC jak na rys. 28 i z kanałem CH1 oscyloskopu. Oscyloskop połączyć z generatorem przewodem BNC-BNC, zaś układ pomiarowy przewodem BNC-wtyki bananowe.
2. Wyjście układu pomiarowego (dzielnika napięcia LC) połączyć przewodem BNC-wtyki bananowe z kanałem CH2 oscyloskopu jak na rys. 28.
3. Przygotować nowy egzemplarz tabeli 1 z odpowiednim opisem badanego filtra.
4. Pomiary przeprowadzić analogicznie jak wcześniej w punktach 3-8 rozdziału 5.1.  
**UWAGA:** należy zwrócić szczególną uwagę na zagęszczenie pomiarów w pobliżu częstotliwości, dla której  $U_{WY}/U_{WE}$  osiąga maksimum.

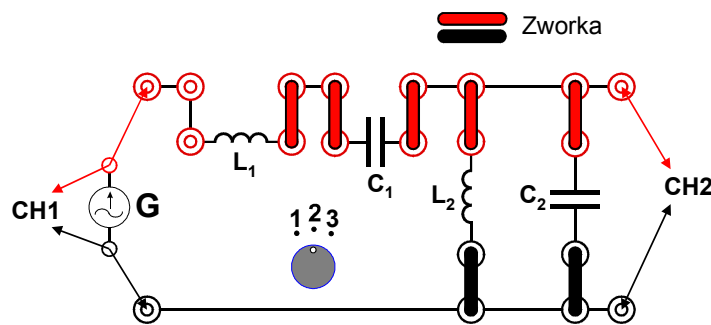


Rys. 28. Schemat połączeń do wyznaczenia charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej i fazowo-częstotliwościowej filtra górnoprzepustowego LC.

## 5.6. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa i fazowo-częstotliwościowa filtra Wienera LC – część rozszerzona

1. Za pośrednictwem trójnika BNC połączyć wyjście OUTPUT generatora **G** jednocześnie z wejściem dzielnika napięcia LC jak na rys. 29 i z kanałem CH1 oscyloskopu. Oscyloskop połączyć z generatorem przewodem BNC-BNC, zaś układ pomiarowy przewodem BNC-wtyki bananowe.
2. Wyjście układu pomiarowego (dzielnika napięcia LC) połączyć przewodem BNC-wtyki bananowe z kanałem CH2 oscyloskopu jak na rys. 29.
3. Przygotować nowy egzemplarz tabeli 1 z odpowiednim opisem badanego filtra.
4. Pomiary przeprowadzić analogicznie jak wcześniej w punktach 3-8 rozdziału 5.1, przy czym obecnie zakres zmian częstotliwości można ograniczyć do przedziału  $100 \text{ Hz} \div 100 \text{ kHz}$ .

**UWAGA:** przed pomiarami właściwymi zalecane jest wstępne wyszukanie maksimum charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej (możliwe jest jedno albo dwa maksima). Należy zwrócić szczególną uwagę na zagęszczenie pomiarów w pobliżu częstotliwości, dla których  $U_{WY}/U_{WE}$  osiąga maksima.



Rys. 29. Schemat połączeń do wyznaczenia charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej i fazowo-częstotliwościowej filtra Wienera LC.

## 6. Wskazówki do raportu

Raport powinien zawierać:

1. Stronę tytułową (wg wzoru).
2. Wstęp i sformułowanie celu ćwiczenia.  
Wstęp do raportu powinien zawierać definicje podstawowych pojęć występujących w raporcie oraz wzory wykorzystane w obliczeniach. W celu łatwiejszego i jednoznacznego odwoływania się do wzorów występujących we wstępie jak i w dalszej części raportu wszystkie z nich powinny być opatrzone numerami porządkowymi.
3. Schematy układów pomiarowych.  
W raporcie należy umieścić schematy tylko takich układów, które były rzeczywiście zestawiane w trakcie wykonywania pomiarów. Każdy schemat powinien być opatrzony numerem kolejnym i zatytułowany. Wszystkie elementy pokazane na schemacie muszą być jednoznacznie opisane i oznaczone za pomocą powszechnie stosowanej symboliki.
4. Wykaz aparatury (nr inwentarzowy, typ, wykorzystywane nastawy i zakresy).  
W wykazie aparatury należy jednoznacznie opisać używaną aparaturę pomiarową poprzez podanie numeru inwentarzowego, typu itd. Nadane poszczególnym przyrządom oznaczenia należy konsekwentnie stosować na wszystkich schematach i w opisach.
5. Stabelaryzowane wyniki pomiarów i nastawy aparatury.  
Każda tabela powinna posiadać swój numer kolejny i tytuł. Oprócz kopii notatek wykonanych podczas zajęć w tabelach należy uzupełnić:
  - 5.1. Oszacowanie niepewności granicznych  $\Delta f$ , dla pomiarów częstotliwości  $f$ , według aneksu A8 instrukcji do ćwiczenia E01 „Miernictwo” lub według instrukcji do generatora funkcyjnego [7].
  - 5.2. Oszacowanie niepewności granicznych  $\Delta U_{WE}$  i  $\Delta U_{WY}$ , dla pomiarów napięć  $U_{WE}$  oraz  $U_{WY}$  odczytanych z oscyloskopu, według aneksu A6 instrukcji do ćwiczenia E01 „Miernictwo” lub według instrukcji do oscyloskopu [7].
  - 5.3. Wartości  $\varphi_{CH1-CH2}$  zanotowane z ekranu oscyloskopu, które dotyczą fazy wejścia układu (CH1) w stosunku do wyjścia (CH2) i zawarte są w przedziale  $0^\circ \div 360^\circ$ , należy zanegować w celu otrzymania fazy wyjścia w stosunku do wejścia a następnie przeskalować do przedziału  $-180^\circ \div +180^\circ$  i zapisać wynik w tabeli jako  $\varphi_{WY-WE}$ . Przeskalowanie polega na przepisaniu bez zmian wartości od  $-180^\circ$  do  $+180^\circ$ , natomiast wartości mniejsze od  $-180^\circ$  należy sprowadzić do tego przedziału przez dodanie  $360^\circ$ , zaś w przypadku wartości większych od  $+180^\circ$  należy odjąć  $360^\circ$ . W arkuszu kalkulacyjnym MS EXCEL wymagane obliczenia wykonuje formuła:
 
$$=MOD(180 - C4;360) - 180$$
 gdzie C4 jest przykładowym adresem komórki zawierającej wartość  $\varphi_{CH1-CH2}$ .  
**UWAGA:** tylko wartości  $\varphi_{WY-WE}$  są bezpośrednio porównywalne z przewidywaniami teoretycznymi dotyczącymi przesunięcia fazy, które podano w rozdziałach 3.3.1 ÷ 3.3.6.
  - 5.4. Wyniki obliczeń  $U_{WY}/U_{WE}$  oraz współczynnika tłumienia  $k$  według wzoru (17).
  - 5.5. Oszacowanie złożonych niepewności granicznych  $\Delta(U_{WY}/U_{WE})$  oraz  $\Delta k$ , wielkości wyznaczanych w sposób pośredni. Wykonując obliczenia należy zwrócić uwagę, że składowe niepewności graniczne, w odróżnieniu od niepewności standardowych, podlegają prawu propagacji niepewności granicznej metodą różniczki zupełnej, opisaną np. w [8], rozdział II.2.5. lub w [9], rozdział 7.6. Jeżeli wyznaczana wielkość jest znaną funkcją wielu zmiennych  $y = y(x_1, x_2, \dots, x_N)$ , przy czym każda

bezpośrednio mierzona zmienna  $x_i$  podlega prostokątnemu rozkładowi prawdopodobieństwa i obarczona jest określoną graniczną niepewnością pomiarową  $\Delta x_i$ , to złożona niepewność graniczna  $\Delta y$  może być obliczona ze wzoru:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| \Delta x_i. \quad (56)$$

Stąd, dla ilorazu napięć  $U_{WY}/U_{WE}$ , otrzymujemy

$$\Delta(U_{WY}/U_{WE}) = \frac{U_{WY}}{U_{WE}} \left( \frac{\Delta U_{WY}}{U_{WY}} + \frac{\Delta U_{WE}}{U_{WE}} \right), \quad (57)$$

natomiast w przypadku współczynnika tłumienia  $k$  zdefiniowanego wzorem (17)

$$\Delta k = \frac{20}{\ln 10} \frac{\Delta(U_{WY}/U_{WE})}{U_{WY}/U_{WE}}. \quad (58)$$

## 6. Wykresy i analizę wyników.

6.1. Wszystkie wykresy wykonane na podstawie przeprowadzonych pomiarów powinny mieć numery porządkowe oraz podpisy zawierające informację o tym co dany wykres przedstawia. Dla każdego zbadanego filtra należy wykonać wykresy:

- charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej  $U_{WY}/U_{WE}(f)$ ,
- charakterystyki fazowo-częstotliwościowej  $\phi_{WY-WE}(f)$  [stopnie],
- współczynnika tłumienia  $k(f)$  [dB].

**UWAGA:** ze względu na szeroki zakres badanych częstotliwości na wszystkich wykresach należy stosować skalę logarytmiczną na osi  $f$  [Hz].

6.2. Dla filtra dolnoprzepustowego RC oraz filtra górnoprzepustowego RC:

6.2.1. Odczytać z wykresu częstotliwość graniczną  $f_g$ , dla której spełniony jest warunek  $U_{WY}/U_{WE} = 1/\sqrt{2}$ , co odpowiada tzw. 3 decybelowej częstotliwości granicznej oraz oszacować jej niepewność graniczną  $\Delta f_g$ .

**UWAGA:** niepewność pomiaru częstotliwości  $\Delta f$  przy użyciu generatora jest bardzo mała i nie ma istotnego znaczenia podczas szacowania niepewności granicznej  $\Delta f_g$ . Niepewność graniczną  $\Delta f_g$  wynika głównie z niepewności granicznej ilorazu napięć  $U_{WY}/U_{WE}$ .

6.2.2. Wykorzystując parametry elementów RC podane w tabeli 2 obliczyć teoretyczną częstotliwość graniczną  $f_g$  według wzoru (20).

6.2.3. Porównać wyniki otrzymane w punktach 6.2.1 i 6.2.2.

6.3. Dla filtra Wiena RC:

6.3.1. Odczytać z wykresu: maksimum  $(U_{WY}/U_{WE})_{\max}$ , częstotliwość  $f_0$  odpowiadającą temu maksimum, oraz dwie częstotliwości graniczne  $f_{g1}$  i  $f_{g2}$  dla tłumienia 3 dB mierzonego względem poziomu maksimum (patrz rys. 9). Na podstawie odczytanych wartości obliczyć dobroć  $Q$  według wzoru (30).

6.3.2. Wykorzystując parametry elementów RC podane w tabeli 2 obliczyć teoretyczne wartości:  $f_0$  według wzoru (28),  $(U_{WY}/U_{WE})_{\max}$  według wzoru (29) oraz  $Q$  według wzoru (31).

6.3.3. Porównać wyniki otrzymane w punktach 6.3.1 i 6.3.2.

6.4. Dla filtra dolnoprzepustowego LC

6.4.1. Odczytać z wykresu: maksimum  $(U_{WY}/U_{WE})_{\max}$  i wykorzystując ten wynik obliczyć doświadczalną wartość dobroci  $Q$  według wzoru (47).

6.4.2. Wykorzystując parametry elementów LC podane w tabeli 3 obliczyć teoretyczną wartość dobroci  $Q$  według wzoru (38). Wartości rezystancji

szeregowej kondensatora  $R_{C2}$  nie są znane, jednakże można przyjąć  $R_{C2} \ll R_{L1}$ , co umożliwia wyznaczenie przybliżonej wartości rezystancji szeregowej  $R \approx R_{L1}$ .

- 6.4.3. Porównać wyniki otrzymane w punktach 6.4.1 i 6.4.2.
- 6.5. Dla filtra górnoprzepustowego LC (*wersja rozszerzona*)
- 6.5.1. Wykorzystując parametry elementów LC podane w tabeli 3 obliczyć teoretyczne wartości częstotliwości przecięcia asymptot:  $f_0$  według wzoru (36) i  $f_p$  według wzoru (51).
- 6.5.2. Na wykresie zależności  $k(f)$  [dB] oznaczyć częstotliwości  $f_0$  i  $f_p$  obliczone w punkcie 6.5.1 oraz wykreślić trzy teoretyczne asymptoty według równań podanych na str. 17 poniżej rys. 18.
- 6.5.3. Ocenić stopień zgodności teoretycznych asymptot z otrzymaną doświadczalnie zależnością  $k(f)$  [dB].
- 6.6. Dla filtra Wienera LC (*wersja rozszerzona*)
- 6.6.1. Wykorzystując parametry elementów LC podane w tabeli 3 obliczyć teoretyczną wartość częstotliwości środkowej  $f_0$  danej wzorem (55) i oznaczyć ją na wykresie  $U_{WY}/U_{WE}(f)$ .
- 6.6.2. Ocenić liczbę maksimumów zależności  $U_{WY}/U_{WE}(f)$  występującą dla danej pozycji przełącznika Pł.2. w zbadanym module doświadczalnym.
7. Uwagi końcowe i wnioski.
- W uwagach końcowych należy zamieścić własne spostrzeżenia co do przebiegu całego ćwiczenia. Należy także ocenić stopień zgodności otrzymanych wyników doświadczalnych z przewidywaniami teoretycznymi i wskazać ewentualne przypadki występowania szczególnie dużych rozbieżności.

W raporcie ocenie podlegać będzie obecność i poprawność wszystkich wymienionych powyżej składników, czytelność prezentacji wyników w postaci tabel, wykresów i wyników liczbowych wraz z jednostkami i opisami oraz jakość sformułowanych wniosków.

Tabela 2. Parametry elementów w filtrach RC uśrednione dla modułów F1-01 ÷ F1-04.

Pozycja przełącznika Pł.1	$R_1$ [k $\Omega$ ]	$R_2$ [k $\Omega$ ]	$C_1$ [nF] przy 1000 Hz	$C_2$ [nF] przy 1000 Hz
1	$0,498 \pm 0,008$	$1,017 \pm 0,020$	$213 \pm 4$	$215 \pm 6$
2	$0,498 \pm 0,008$	$1,017 \pm 0,020$	$456 \pm 12$	$464 \pm 11$
3	$0,498 \pm 0,008$	$1,017 \pm 0,020$	$967 \pm 25$	$985 \pm 15$

Tabela 3. Parametry elementów w filtrach LC uśrednione dla modułów F1-01 ÷ F1-04.

Pozycja przełącznika Pł.2	$L_1$ [mH]	$R_{L1}$ [ $\Omega$ ]	$L_2$ [mH]	$R_{L2}$ [ $\Omega$ ]	$C_1$ [nF] przy 1000 Hz	$C_2$ [nF] przy 1000 Hz
1	$3,9 \pm 0,2$	$41,4 \pm 2,3$	$1,00 \pm 0,05$	$24,4 \pm 0,7$	$218 \pm 4$	$981 \pm 23$
2	$3,9 \pm 0,2$	$41,4 \pm 2,3$	$3,9 \pm 0,2$	$42,2 \pm 1,9$	$467 \pm 4$	$462 \pm 11$
3	$3,9 \pm 0,2$	$41,4 \pm 2,3$	$33 \pm 1$	$63,9 \pm 2,3$	$1001 \pm 49$	$217 \pm 5$

## 7. Literatura

### 7.1. Literatura podstawowa

- [1] R. Śledziewski, „Elektronika dla Fizyków”, PWN, W-wa 1984.
- [2] T. Stacewicz, A. Kotlicki, „Elektronika w laboratorium naukowym”, PWN, W-wa 1994.
- [3] E. Koziej, B. Sochoń, „Elektrotechnika i elektronika”, PWN, W-wa 1980.
- [4] R. Resnick, D. Halliday, „Fizyka”, tom. II, PWN, W-wa 1998.  
<http://han.p.lodz.pl/han/ibuk-libra/https/libra.ibuk.pl/book/146326>
- [5] A. Hennel, W. Szuszkiewicz, „Zadania i problemy z Fizyki”, tom II, PWN, W-wa 1993.
- [6] A. Januszajtis, „Fizyka dla Politechnik – Fale”, tom III, PWN, W-wa 1991.

### 7.2. Literatura uzupełniająca

- [7] Instrukcje obsługi do multimetrów, generatora funkcyjnego i oscyloskopu dostępne są na stronie internetowej:  
<https://fizyka.p.lodz.pl/pl/dla-studentow/informatyka/podstawy-elektroniki-laboratorium/zasoby/>
- [8] B. Żółtowski, „Wprowadzenie do zajęć laboratoryjnych z fizyki”, skrypt PŁ, 2002, rozdział „II.2. Obliczanie wartości błędów”, dostępny na stronie internetowej:  
<https://fizyka.p.lodz.pl/pl/dla-studentow/informatyka/podstawy-elektroniki-laboratorium/zasoby/>
- [9] A. Zięba, *Analiza danych w naukach ścisłych i technice*, PWN, Warszawa, 2014, rozdział „7. Pomiar pośredni. Prawo propagacji niepewności”  
<http://han.p.lodz.pl/han/ibuk-libra/https/libra.ibuk.pl/book/71824>