

Temat 23. Koncentracja nośników i poziom Fermiego w półprzewodnikach

23.1. Półprzewodnik samoistny

W półprzewodnikach koncentracja elektronów w paśmie przewodnictwa n jest zwykle mała w porównaniu do gęstości poziomów w tym paśmie, a energia Fermiego \mathcal{E}_F leży poniżej dna pasma przewodnictwa. W takiej sytuacji $(\mathcal{E} - \mathcal{E}_F) \gg k_B T$ i funkcję Fermiego $f_e(\mathcal{E})$ opisującą prawdopodobieństwo zapelnienia stanu o energii \mathcal{E} możemy przybliżyć funkcją rozkładu Boltzmanna

$$f_e(\mathcal{E}) = \frac{1}{\exp[(\mathcal{E} - \mathcal{E}_F)/k_B T] + 1} \approx \exp[-(\mathcal{E} - \mathcal{E}_F)/k_B T]. \quad (23.1)$$

Gęstość stanów w paśmie przewodnictwa $D_e(\mathcal{E})$ została wyprowadzona wcześniej w Temacie 21, wzór (21.12), przy wykorzystaniu przybliżenia parabolicznego:

$$D_e(\mathcal{E}) = \frac{m_e^*}{\pi^2 \hbar^3} \sqrt{2m_e^*(\mathcal{E} - \mathcal{E}_{0e})}, \quad (23.2)$$

gdzie \mathcal{E}_{0e} jest energią elektronu na dnie pasma przewodnictwa. Koncentracja elektronów w paśmie przewodnictwa (zdefiniowana jako liczba elektronów na jednostkę objętości) jest równa

$$n = \int_{\mathcal{E}_{0e}}^{\infty} D_e(\mathcal{E}) f_e(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_e^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \exp(\mathcal{E}_F / k_B T) \int_{\mathcal{E}_{0e}}^{\infty} \sqrt{\mathcal{E} - \mathcal{E}_{0e}} \exp(-\mathcal{E}/k_B T) d\mathcal{E}. \quad (23.3)$$

Wykonanie podstawienia

$$x = \sqrt{(\mathcal{E} - \mathcal{E}_{0e})/k_B T} \quad (23.4)$$

prorowadzi do wzoru w postaci

$$n = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_e^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_{0e}}{k_B T}\right) 2(k_B T)^{3/2} \int_0^{\infty} x^2 \exp(-x^2) dx, \quad (23.5)$$

w którym występuje całka znana z tablic

$$\int_0^{\infty} x^2 \exp(-x^2) dx = \frac{1}{4} \sqrt{\pi}. \quad (23.6)$$

Ze wzorów (23.5) i (23.6) otrzymujemy

$$n = \frac{1}{4} \left(\frac{2m_e^* k_B T}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_{0e}}{k_B T}\right) = N_{ef} \exp\left(\frac{\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_{0e}}{k_B T}\right), \quad (23.7)$$

gdzie N_{ef} jest efektywną gęstością stanów.

Wyprowadzenie analogicznej zależności dla dziur elektronowych w paśmie walencyjnym przebiega podobnie z wyjątkiem następujących różnic:

- masę efektywną elektronu m_e^* należy zastąpić przez masę efektywną dziury m_h^* ,
- energię \mathcal{E}_{0e} zastępujemy przez energię na wierzchołku pasma walencyjnego \mathcal{E}_{0h} ,
- odwracamy znaki przy wszystkich wielkościach opisujących energie.

$$p = \frac{1}{4} \left(\frac{2m_h^* k_B T}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{\mathcal{E}_{0h} - \mathcal{E}_F}{k_B T}\right) = P_{ef} \exp\left(\frac{\mathcal{E}_{0h} - \mathcal{E}_F}{k_B T}\right) \quad (23.8)$$

W półprzewodniku samoistnym dziury w paśmie walencyjnym powstają przez termiczne wzbudzenie elektronów do pasma przewodnictwa, tak więc ich koncentracje muszą być równe. Przyrównując koncentracje dane wzorami (23.7) i (23.8) otrzymujemy

$$\exp\left(\frac{2\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_{0e} - \mathcal{E}_{0h}}{k_B T}\right) = \left(\frac{m_h^*}{m_e^*}\right)^{3/2}, \quad (23.9)$$

$$\mathcal{E}_F = \frac{1}{2}(\mathcal{E}_{0e} + \mathcal{E}_{0h}) + \frac{3}{4}k_B T \ln \frac{m_h^*}{m_e^*}. \quad (23.10)$$

W przypadku gdy masy efektywne dziur i elektronów są równe poziom Fermiego leży dokładnie w środku przerwy energetycznej. Sytuacja taka występuje także w temperaturze $T = 0$ niezależnie od wartości mas efektywnych. Poziom Fermiego w półprzewodnikach ma więc inny sens fizyczny niż w metalach. Poziom leżący w przerwie energetycznej nie może oddzielać stanów obsadzonych od nieobsadzonych i należy go traktować jedynie jako parametr w funkcji rozkładu (23.1).

Przy różnych masach efektywnych dziur i elektronów poziom Fermiego zależy liniowo od temperatury. Zmiany te są jednak małe w porównaniu do szerokości przerwy energetycznej. Przykładowo w temperaturze pokojowej $T = 293$ K wyraz opisujący wpływ temperatury we wzorze (23.10) wynosi $(3/4)k_B T \approx 0,019$ eV.

23.2. Prawo działania mas

Po pomnożeniu koncentracji n i p danych wzorami (23.7) i (23.8) oraz wprowadzeniu oznaczenia E_g dla szerokości przerwy energetycznej

$$E_g = \mathcal{E}_{0e} - \mathcal{E}_{0h}. \quad (23.11)$$

otrzymujemy związek zwany *prawem działania mas*

$$n p = \frac{1}{2} \left(\frac{k_B T}{\pi \hbar^2}\right)^3 (m_e^* m_h^*)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_g}{k_B T}\right). \quad (23.12)$$

Z prawa działania mas wynikają następujące wnioski:

1) W półprzewodnikach samoistnych

Z warunku równości koncentracji elektronów przewodnictwa i dziur $n_i = p_i$ oraz z prawa (23.12) otrzymujemy

$$n_i = p_i = 2 \left(\frac{k_B T}{2\pi \hbar^2}\right)^{3/2} (m_e^* m_h^*)^{3/4} \exp\left(-\frac{E_g}{2k_B T}\right), \quad (23.13)$$

gdzie indeks „i” oznacza samoistny (*ang. intrinsic*).

2). W półprzewodniku domieszkowanym

Podczas wyprowadzania prawa działania mas (23.12) wykorzystane zostało jedynie przybliżenie paraboliczne zależności $\mathcal{E}(\mathbf{k})$, natomiast nigdzie nie założyliśmy, że materiał jest półprzewodnikiem samoistnym, tak więc prawo to obowiązuje także dla półprzewodników domieszkowanych. Ponieważ w ustalonej temperaturze iloczyn koncentracji np jest stały,

$$n p = n_i^2, \quad (23.14)$$

więc wprowadzenie domieszki zwiększającej koncentrację elektronów n powoduje jednocześnie spadek koncentracji dziur p . Całkowitą koncentrację nośników $n + p$ w zanieczyszczonym kryształcie możemy bardzo silnie zmniejszyć poprzez kontrolowane wprowadzanie odpowiednich domieszek. Proces taki nazywamy **kompensacją**.

23.3. Półprzewodnik domieszkowany

W półprzewodniku domieszkowanym występują dodatkowe źródła nośników prądu i dlatego

$$n - p = \Delta n \neq 0. \quad (23.15)$$

Równania (23.7) i (23.8) opisujące równowagowe koncentracje nośników pozostają poprawne, z tym że wartość energii Fermiego w półprzewodniku domieszkowym \mathcal{E}_F ulegnie zmianie względem wartości $\mathcal{E}_{F(i)}$ dla półprzewodnika samoistnego. Stąd możemy zapisać

$$n = n_i \exp\left(+\frac{\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_{F(i)}}{k_B T}\right) \quad \text{oraz} \quad p = p_i \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_{F(i)}}{k_B T}\right). \quad (23.16)$$

Ze wzorów (23.15) i (23.16) otrzymujemy związek

$$\frac{\Delta n}{n_i} = 2 \sinh\left(\frac{\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_{F(i)}}{k_B T}\right). \quad (23.17)$$

W półprzewodnikach donorowych $\Delta n > 0$, zatem energia Fermiego $\mathcal{E}_F > \mathcal{E}_{F(i)}$,
w półprzewodnikach akceptorowych $\Delta n < 0$, zatem energia Fermiego $\mathcal{E}_F < \mathcal{E}_{F(i)}$.

Wyznamy teraz gęstość większościowych nośników prądu w półprzewodniku typu n . Analogiczne związki można wyprowadzić dla półprzewodnika typu p , który zostanie tutaj pominięty.

1). Przypadek niskich temperatur - obszar wymrażana nośników.

Funkcję rozkładu Fermiego możemy zastosować także do opisu koncentracji elektronów na poziomach donorowych o energii \mathcal{E}_D

$$n_D = N_D f_e(\mathcal{E}_D) = \frac{N_D}{\exp[(\mathcal{E}_D - \mathcal{E}_F)/k_B T] + 1}, \quad (23.18)$$

gdzie N_D jest koncentracją domieszek donorowych. W niezbyt wysokich temperaturach $E_g \gg k_B T$ i niemal wszystkie elektrony w paśmie przewodnictwa pochodzą z jonizacji donorów, stąd

$$n \approx N_D - n_D = N_D \left\{ 1 - \frac{1}{\exp[(\mathcal{E}_D - \mathcal{E}_F)/k_B T] + 1} \right\} = \frac{N_D}{\exp[(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_D)/k_B T] + 1}. \quad (23.19)$$

Energję Fermiego \mathcal{E}_F możemy wyeliminować wykorzystując wyprowadzony wcześniej wzór (23.7), z którego wyznaczymy

$$\exp\left(\frac{\mathcal{E}_F}{k_B T}\right) = \frac{n}{N_{ef}} \exp\left(\frac{\mathcal{E}_{0e}}{k_B T}\right) \quad (23.20)$$

i podstawiamy do (23.19) otrzymując

$$n \approx \frac{N_D}{\frac{n}{N_{ef}} \exp(\mathcal{E}_d / k_B T) + 1}, \quad (23.21)$$

$$\frac{n^2}{N_{ef}} \exp(\mathcal{E}_d / k_B T) + n \approx N_D, \quad (23.22)$$

gdzie $\mathcal{E}_d = \mathcal{E}_{0e} - \mathcal{E}_D$ jest energią jonizacji donora. Jest to równanie kwadratowe ze względu na n , które ma tylko jedno rozwiązanie $n > 0$

$$n \approx 2N_D \left[1 + \sqrt{1 + 4 \frac{N_D}{N_{ef}} \exp(\mathcal{E}_d / k_B T)} \right]^{-1}. \quad (23.23)$$

W temperaturach tak niskich, że $4(N_D/N_{ef})\exp(\mathcal{E}_d/k_B T) \gg 1$ otrzymujemy przybliżenie

$$n \approx \sqrt{N_D N_{ef}} \exp(-\mathcal{E}_d / 2k_B T). \quad (23.24)$$

2). Średnie temperatury - obszar nasycenia.

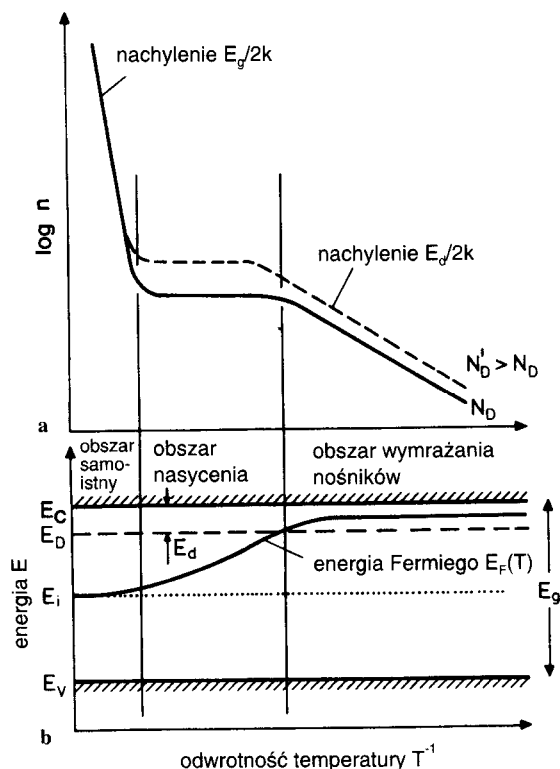
Powyżej pewnej temperatury niemal wszystkie domieszki są już zjonizowane, natomiast średnia energia drgań termicznych $k_B T \ll E_g$. W takiej sytuacji można zaniedbać elektrony wzbudzone z pasma walencyjnego, natomiast równanie (23.23) przechodzi w

$$n \approx N_D = \text{const.} \quad (23.25)$$

3). Wysokie temperatury - przewodnictwo samoistne.

Przy dalszym wzroście temperatury koncentracja nośników n_i wzbudzonych z pasma walencyjnego rośnie i w końcu przekracza koncentrację elektronów wzbudzonych z donorów n_D . W tym zakresie temperatur $n \approx n_i$, gdzie koncentracja nośników w półprzewodniku samoistnym jest opisana wzorem (23.13).

Przedstawiając zależność logarytmu koncentracji nośników $\log(n)$ od odwrotności temperatury T^{-1} na jednym wykresie dla wszystkich omówionych obszarów temperatur otrzymamy trzy w przybliżeniu prostoliniowe odcinki o następujących nachyleniach prostej: $E_d/2k_B$, 0 , $E_g/2k_B$ w kolejności od najmniejszej do największej temperatury (rys. 23.1).



Rys. 23.1. Jakościowe zależności w półprzewodniku typu n w funkcji odwrotności temperatury T^{-1} . (a) koncentracja elektronów w paśmie przewodnictwa n , (b) energia Fermiego E_F [4]. Oznaczenia na rysunku: E_C - dolna krawędź pasma przewodnictwa, E_V - górna krawędź pasma walencyjnego.