

Temat 11. Widmo drgań sieci

Zadanie 11.1

Określ średnią liczbę fononów w funkcji temperatury dla kryształu trójwymiarowego w modelu Einsteina. Rozważ obszar niskich i wysokich temperatur.

Wskazówka: w modelu Einsteina drgania trójwymiarowej sieci złożonej z N atomów rozpatruje się jako N niezależnych oscylatorów o określonych częstotliwościach ω_E , przy czym każdy oscylator może wykonywać drgania o trzech typach polaryzacji, co oznacza, że gęstość stanów fononowych $D(\omega) = 3N \delta(\omega - \omega_E)$.

Zadanie 11.2

Określ średnią liczbę fononów w funkcji w funkcji temperatury dla kryształu trójwymiarowego w modelu Debya'a. Rozważ obszar niskich i wysokich temperatur.

Wskazówka 1:
$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

Wskazówka 2: gęstość stanów fononowych D dla jednego rodzaju polaryzacji w funkcji częstości ω dla kryształu trójwymiarowego w przybliżeniu Debye'a była wyprowadzona na wykładzie:

$$D(\omega) = \frac{\omega^2 L^3}{2\pi^2 v^3},$$

gdzie L jest długością krawędzi próbki w kształcie sześcianu, zaś v jest prędkością dźwięku, a częstości ω przyjmują wartości od 0 do ω_D

$$\omega_D = \left(6\pi^2 N\right)^{1/3} \frac{v}{L}.$$

Zadanie 11.3

Wzorując się na wyprowadzeniu funkcji gęstości stanów $D(\omega)$ w kryształ trójwymiarowym w przybliżeniu Debye'a, które było przedstawione na wykładzie w rozdziale 11.3, wyprowadzić wzór opisujący funkcję gęstości stanów w kryształ dwuwymiarowym, tzn. o grubości jednej warstwy atomów.

Zadanie 11.4

Korzystając z wyników zadania 11.3 określ średnią liczbę fononów w funkcji temperatury dla kryształu dwuwymiarowego w przybliżeniu Debye'a. Rozważ obszar niskich i wysokich temperatur. Porównaj wyniki z przypadkiem trójwymiarowym.

Wskazówka:
$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6}.$$