Temat 5. Kodowanie liczb

Spis treści do tematu 5

5.1. Kodowanie liczb stałopozycyjnych

5.1.1. Naturalny kod binarny NKB (ang. *natural binary code*)

n-bitowe słowo $X = < x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_1, x_0 >$ reprezentuje w NKB liczbę całkowitą nieujemną o wartości

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i x_i \qquad (5.1)$$

Konwersja kodu NKB na kod dziesiętny

Konwersja wykonywana przez ludzi

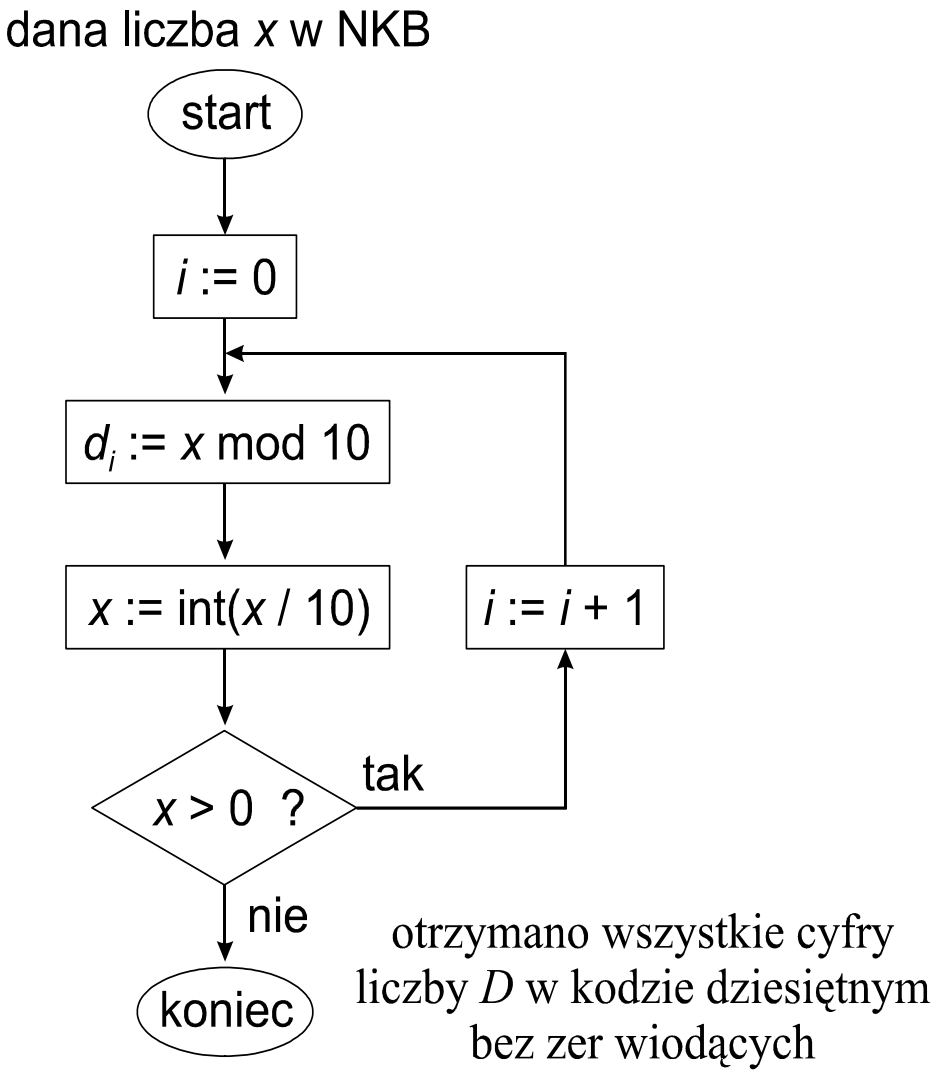
Przykład: liczba 00101001 w NKB odpowiada w kodzie dziesiętnym

$$x = 2^7 \cdot 0 + 2^6 \cdot 0 + 2^5 \cdot 1 + 2^4 \cdot 0 + 2^3 \cdot 1 + 2^2 \cdot 0 + 2^1 \cdot 0 + 2^0 \cdot 1 = 32 + 8 + 1 = 41$$

Konwersja kodu NKB na kod dziesiętny

Konwersja w programie komputerowym

Kolejne cyfry w kodzie dziesiętnym $D = < d_{n-1}, d_{n-2}, ..., d_1, d_0 >$ znajdujemy wg. algorytmu



Przykład obliczeń:
1) dana $x := 00101001_2 = 41_{10}$
2) $d_0 := 41_{10} \bmod 10_{10}$ (wynik 1_{10})
3) $x := \text{int}(41_{10}/10_{10})$ (wynik 4_{10})
4) $d_1 := 4_{10} \bmod 10_{10}$ (wynik 4_{10})
5) $x := \text{int}(4_{10}/10_{10})$ (wynik 0_{10})
6) koniec, bo $x = 0$

Otrzymano słowo cyfr dziesiętnych
$<d_1, d_0> = <4, 1>$

Rys. 5.1. Algorytm konwersji liczby całkowitej w NKB na liczbę w systemie dziesiętnym.

Konwersja kodu dziesiętnego na NKB

Konwersja wykonywana przez ludzi

Konwersja liczby przedstawionej w kodzie dziesiętnym na NKD przez ludzi przywykłych do używania tylko kodu dziesiętnego wymaga iteracyjnego powtarzania dzielenia przez dwa oraz znajdowania reszty z tego dzielenia.

Przykład: przedstawić liczbę 37_{10} w NKB
1) 37 / 2 = 18 i reszta z dzielenia 1 $\rightarrow x_0 = 1$
2) 18 / 2 = 9 bez reszty z dzielenia $\rightarrow x_1 = 0$
3) 9 / 2 = 4 i reszta z dzielenia 1 $\rightarrow x_2 = 1$
4) 4 / 2 = 2 bez reszty z dzielenia $\rightarrow x_3 = 0$
5) 2 / 2 = 1 bez reszty z dzielenia $\rightarrow x_4 = 0$
6) 1 / 2 = 0 i reszta z dzielenia 1 $\rightarrow x_5 = 1$
7) koniec gdy zerowy wynik dzielenia.

Wynik konwersji: $100101_2 = 37_{10}$

Konwersja w programie komputerowym

W programach komputerowych kod *NKB* jest bezpośrednio stosowany do kodowania zmiennych całkowitych. Jeżeli dane są kolejne cyfry $d_0, d_1, ..., d_n$ liczby w kodzie dziesiętnym, to wartość w NKD obliczamy wprost ze wzoru:

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} 10^i d_i \qquad (5.2)$$

Znaczenie znajomości reguł konwersji pomiędzy kodem dziesiętnym i NKB

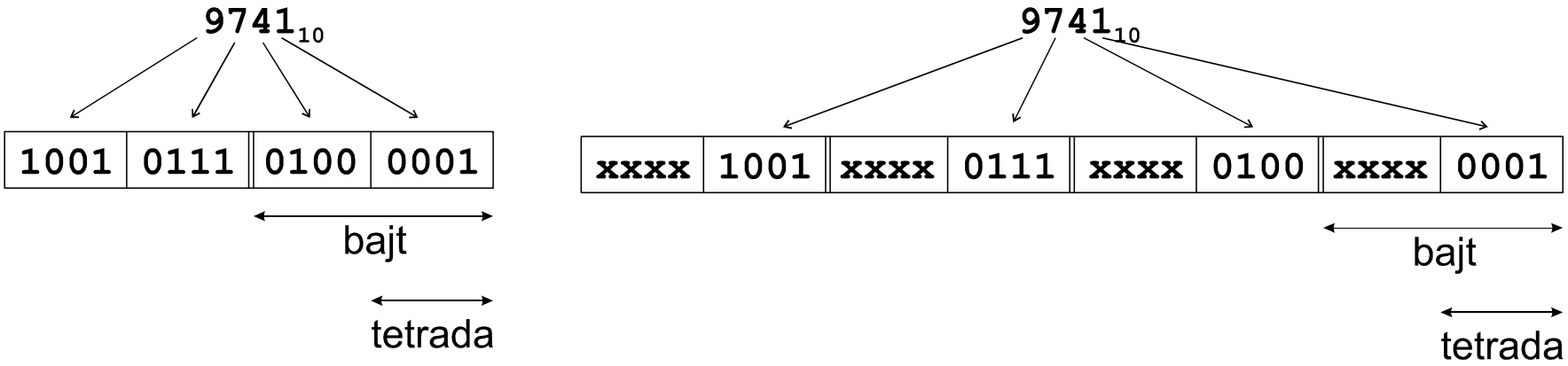
Procedury konwersji dostosowane do specyfiki konkretnego zadania są zazwyczaj krótsze i szybsze od procedur z bibliotek standardowych.

5.1.2. Kod dwójkowo-dziesiętny BCD (ang. *binary coded decimal*)

Jedna cyfra dziesiętna jest kodowana przy użyciu grupy czterech bitów zwanych **tetradą** (ang. *nibble*).

upakowany kod BCD 8421 (ang. *packed BCD*)

nieupakowany kod BCD (ang. *unpacked BCD*)



Rys. 5.2. Format liczb w upakowanym i nieupakowanym kodzie BCD.

Szczególnym przypadkiem nieupakowanego kodu BCD jest liczba całkowita przedstawiona jako tekst ASCII, gdzie w miejscu „xxxx” musi wystąpić 0011_2. Kod ASCII znaku drukarskiego 0 wynosi $48_{10} = 00110000_2$; kolejnym cyfrom przypisano kolejne kody.

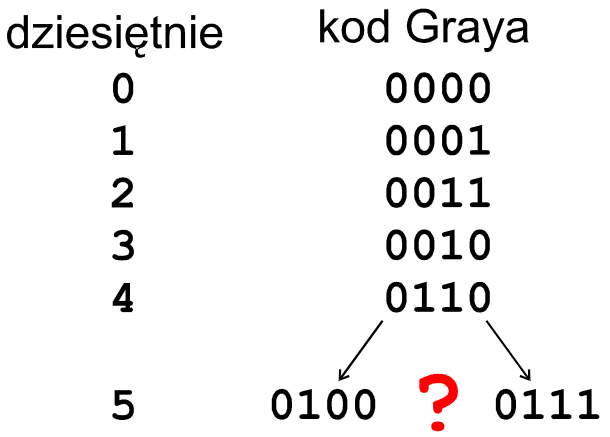
5.1.3. Kod Graya

Każde dwie kolejne liczby zapisane w kodzie Graya różnią się dokładnie jednym bitem.

Ważniejsze zastosowania kodu Graya:

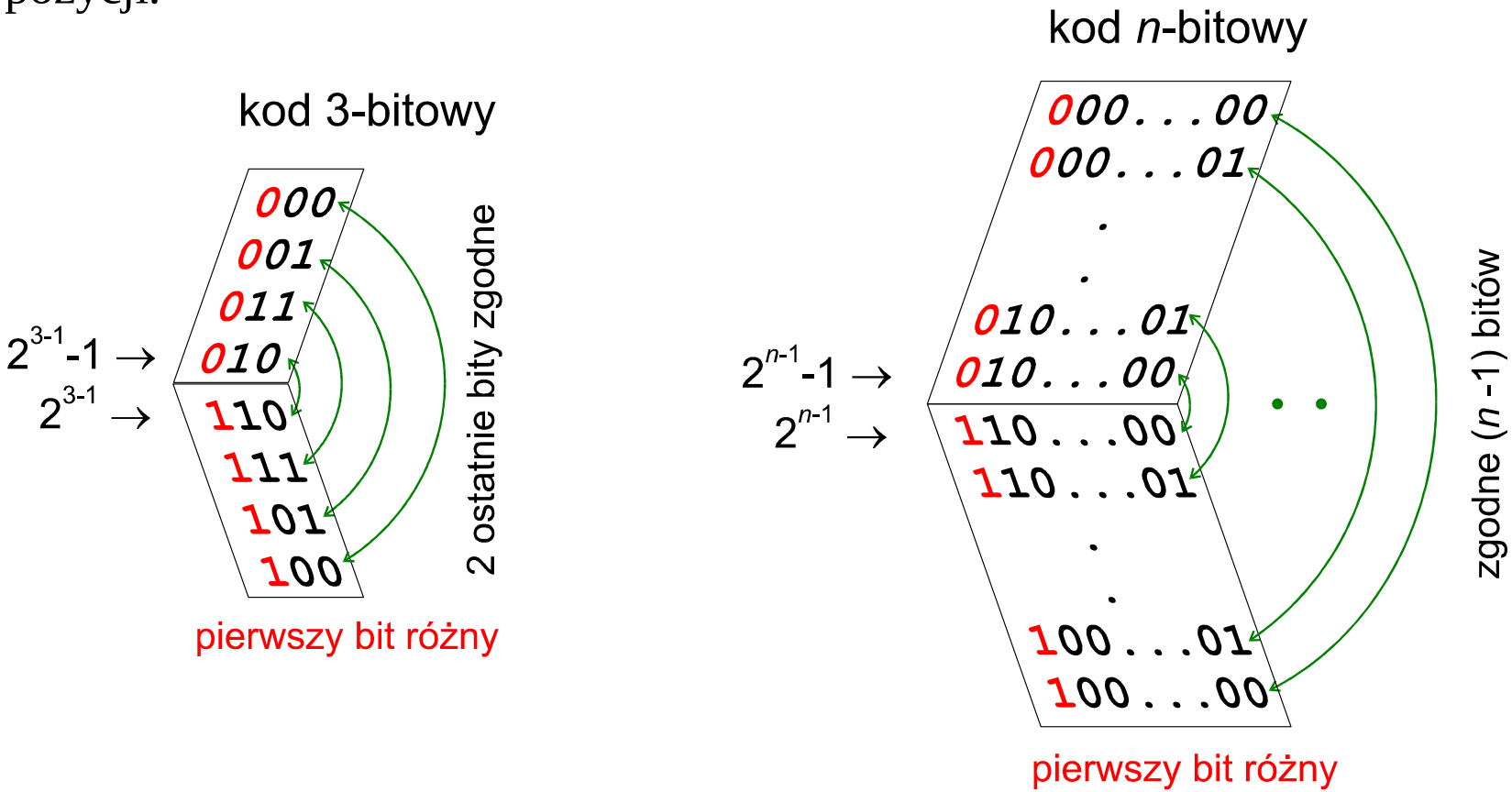
- Kod Graya został opracowany w celu zwiększenia niezawodności układów kontroli i sterowania przez eliminiację jednoczesnych przełączeń na liniach wielobitowych, na których występują przejścia przez kolejne wartości.
- Obecnie kod Graya (wersja BRGC) jest często wykorzystywany do syntezy i minimalizacji wyrażeń logicznych, np. w graficznej metodzie tablic Karnaugha.

Dla danej długości słowa (liczby bitów) istnieje wiele możliwych kodów Graya.



Rys. 5.3. Przykład różnych możliwości zapisu kolejnej liczby w kodzie Graya gdy określony jest zapis liczb poprzednich.

Zazwyczaj przez kod Graya rozumie się kod BRGC (ang. *binary-reflected Gray code*). Istnieje tylko jeden kod BRGC. Pierwsze dwie liczby w kodzie BRGC są kodowane jako 0 i 1, a kolejne liczby są tworzone przez odbicie lustrzane tablicy wcześniej wygenerowanych liczb i rozszerzenie o 1 bit na pierwszej pozycji.



Rys. 5.4. Wykorzystanie zgodności bitów w dwóch kolejnych grupach 2^{n-1} liczb do prostego generowania liczb w *n*-bitowym kodzie BRGC.

5.1.4. Kod znak-moduł (ang. *sign-magnitude*)

Liczba całkowita w kodzie znak-moduł jest zdefiniowana jako zespół

S - bit znaku, *M* - moduł w NKB

Rys. 5.5. Format liczby 8 bitowej w kodzie znak-moduł.

$$x = (-1)^S \cdot M, \qquad (5.3)$$

gdzie: *S* - znak (ang. *sign*),
M - moduł (ang. *magnitude*).

znak-moduł	dziesiętnie	
01111111	127	← maksimum
...		
00000001	1	
00000000	+0	dwa sposoby
10000000	–0	kodowania zera
10000001	–1	
...		
11111111	–127	← minimum

Zastosowanie:
W standardzie kodowania liczb zmiennoprzecinkowych IEEE 754 znak liczby oraz moduł mantysy są kodowane niezależnie i razem można je rozważać jako mantysę ze znakiem w kodzie znak-moduł.

Tabela 5.1. Charakterystyczne wartości w kodzie znak-moduł dla liczby 8-bitowej.

5.1.5. Kod uzupełnień do dwóch U2 (ang. *two's complement*)

Liczby w kodzie U2 są zapisywane następująco:

- liczby dodatnie i zero:

  kodowane jak w NKB (bez użycia najbardziej znaczącego bitu = 0)

- liczby ujemne wg zależności:

$$-X = \overline{X} + 1 \qquad (5.4)$$

gdzie: $-X$ jest negacją arytmetyczną X, $\overline{X}$ jest negacją bitową X.

kod U2		dziesiętnie
11111001_2	=	-7_{10}
↓ negacja bitów		
00000110_2	=	$+6_{10}$
↓ +1		
00000111_2	=	$+7_{10}$

Procedura obliczania liczby $-X$ w kodzie U2:
1). Zanegować wszystkie bity liczby X.
2). Dodać 1.

Rys. 5.6. Przykład obliczania liczby przeciwnej do –7 zapisanej w kodzie U2.

znak-moduł	dziesiętnie	
01111111	127	← maksimum
...		
00000001	1	
00000000	0	
11111111	–1	
...		
10000000	–128	← minimum

Tabela 5.2. Charakterystyczne wartości w kodzie U2 dla liczby 8-bitowej.

Jeżeli X jest kodowane przy użyciu n bitów, to zachodzi związek

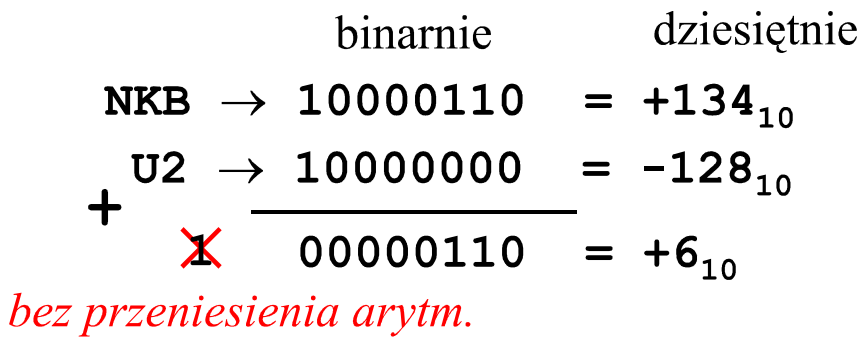
$$2^n - \mathrm{NKB}(X) = \mathrm{NKB}(-X), \qquad (5.5)$$

gdzie NKB(...) – rzutowanie (konwersja) bez ingerencji w bity.

	binarnie		dziesiętnie
	1 00000000	**=**	$\mathbf{2^8 = 256_{10}}$
-	**11111101**	←	$\mathbf{NKB(-3_{10}\ w\ U2) = 253_{10}}$
	00000011	**=**	$\mathbf{3_{10}}$

Rys. 5.7. Przykład obliczania liczby przeciwnej do –3 przy wykorzystaniu właściwości uzupełniania $-X$ oraz NKB(X) do 2^n w n-bitowym kodzie U2.

Zastosowanie:
Kod U2 jest powszechnie wykorzystywany do reprezentowania liczb całkowitych ze znakiem w systemach komputerowych i mikrokontrolerach. Ten sam układ logiczny umożliwia poprawne sumowanie, odejmowanie i mnożenie w kodach NKB i U2, także w przypadku mieszanych argumentów w NKB oraz U2.



Rys. 5.8. Przykład poprawnej operacji arytmetycznej na dwóch argumentach wyrażonych w kodach NKB oraz U2. Uzyskany wynik jest prawidłowy zarówno w kodzie NKB jak i U2.

Przykład wykorzystania właściwości kodu U2 do optymalizacji programu generowanego przez kompilatory języków C/C++.

```
signed int suma(signed int a1, unsigned int a2) {
  /* poprawne wykonanie tego sumowania nie wymaga
  konwersji argumentów do typu danych o szerszym zakresie */
  return a1 + a2;
}

signed int a = -7;
unsigned int b = 3;
signed int w = suma(a, b);
```

5.2. Kodowanie liczb zmiennopozycyjnych

5.2.1. Ogólne zasady kodowania liczb zmiennopozycyjnych

Liczba zmiennopozycyjna (zmiennoprzecinkowa) jest zdefiniowana jako zespół

$$x = (-1)^S \bullet M \bullet 2^E, \tag{5.6}$$

gdzie: S – znak (ang. *sign*),

M – mantysa (ang. *mantissa*),

E – wykładnik (ang. *exponent*).

Wykładnik zazwyczaj zapisuje się jako przesuniętą liczbę bez znaku (ang. *biased exponent*)

$$E = E_b - B, \tag{5.7}$$

gdzie: E – wartość wykładnika,

E_b – zapis w pamięci jako liczba NKB bez znaku z przesunięciem,

B – przesunięcie (ang. *bias*) zależne od zakresu wartości E_b.

Liczby znormalizowane (ang. *normalized numbers*)

Z wielu możliwych reprezentacji danej liczby zmiennoprzecinkowej wybiera się taką która zawiera najwięcej cyfr znaczących w mantysie (po pominięciu zer nieznaczących z lewej strony mantysy). W liczbie znormalizowanej najbardziej znacząca cyfra (bit przy kodowaniu binarnym) mantysy zawsze $\neq 0$.

Liczby zdenormalizowane (ang. *denormal numbers*)

Liczby w których nastąpiła utrata precyzji mantysy. Najbardziej znacząca cyfra (bit przy kodowaniu binarnym) mantysy = 0.

Przykład:

Załóżmy, że w formularzu możemy zapisać tylko 5 cyfr mantysy, 2 cyfry wykładnika oraz znaki +/– dla mantysy i wykładnika. Normalizacja wyniku działania na liczbach znormalizowanych może być niewykonalna przy powyższych ograniczeniach, np.

$$3.2003 \cdot 10^{-99} / 1.0 \cdot 10^{+1} = ? \quad (\text{brak miejsca na zapis } 3.2003 \cdot 10^{-100})$$

Dwie możliwości zapisu wyników bliskich zero, których nie da się znormalizować:
1) zaokrąglenie do zera, czyli raptowny niedomiar (ang. *abrupt underflow*), np.

$$3.2003 \cdot 10^{-99} / 1.0 \cdot 10^{+1} = 0,$$

2) użycie liczby zdenormalizowanej, stopniowy niedomiar (ang. *gradual underflow*)

$$3.2003 \cdot 10^{-99} / 1.0 \cdot 10^{+1} = 0.3200 \cdot 10^{-99}.$$

5.2.2. Kodowanie liczb zmiennoprzecinkowych wg. normy IEEE 754

Formaty liczb zmiennoprzecinkowych określone w normie IEEE 754 są obecnie powszechnie wykorzystywane zarówno w systemach komputerowych jak i w mikrokontrolerach.

Podstawowe założenia przyjęte w normie IEEE 754:

1). Mantysa składa się z jednobitowej części całkowitej i wielobitowej części ułamkowej.

- Mantysa liczb znormalizowanych $1 \le M < 2$,
- mantysa liczb zdenormalizowanych $M < 1$.

2). Liczby są przedstawiane jako znormalizowane zawsze gdy jest to możliwe. Tylko bardzo małe liczby są przedstawiane jako liczby zdenormalizowane.

3). Odróżnia się następujące typy liczb i symboli:

- liczba 0: $E_b = E_{min}$; $M = 0$; $S = 0$ albo 1 (odróżniane zero ze znakiem + albo –),
- liczby zdenormalizowane: $E_b = E_{min}$; $0 < M < 1.0$,
- liczby znormalizowane: $E_{min} < E_b < E_{max}$,
- $\pm\infty$: $E_b = E_{max}$; $M = 0$; $S = 0$ albo 1,
- NaN - nieliczba (ang. not a number): $E_b = E_{max}$; $M \neq 0$; S – nieistotne.

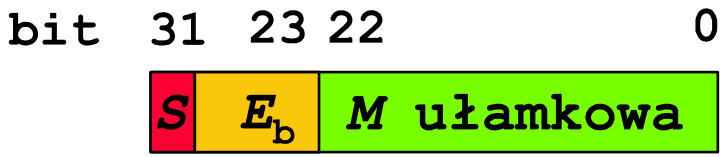
Norma IEEE 754 precyzuje dwa typy zmiennoprzecinkowe:

1). Pojedyncza precyzja (ang. *float*, *single precision*)

Wartość liczby znormalizowanej wyznacza się ze wzoru:

$$x = (-1)^S \cdot M \cdot 2^{(Eb - 127)} \tag{5.8}$$

Liczba cyfr znaczących w zapisie dziesiętnym: 6...7.



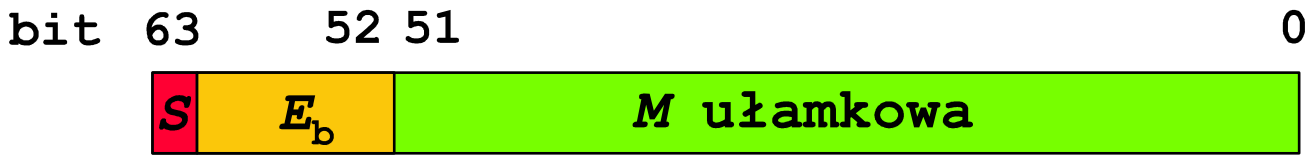
Rys. 5.9. Format liczb zmiennoprzecinkowych IEEE 754 pojedynczej precyzji, gdzie: *S* - znak, *M* - mantysa w NKB, E_B - wykładnik bez znaku w NKB z przesunięciem.

2). Podwójna precyzja (ang. *double precision*)

Wartość liczby znormalizowanej wyznacza się ze wzoru:

$$x = (-1)^S \cdot M \cdot 2^{(Eb - 1023)}. \tag{5.9}$$

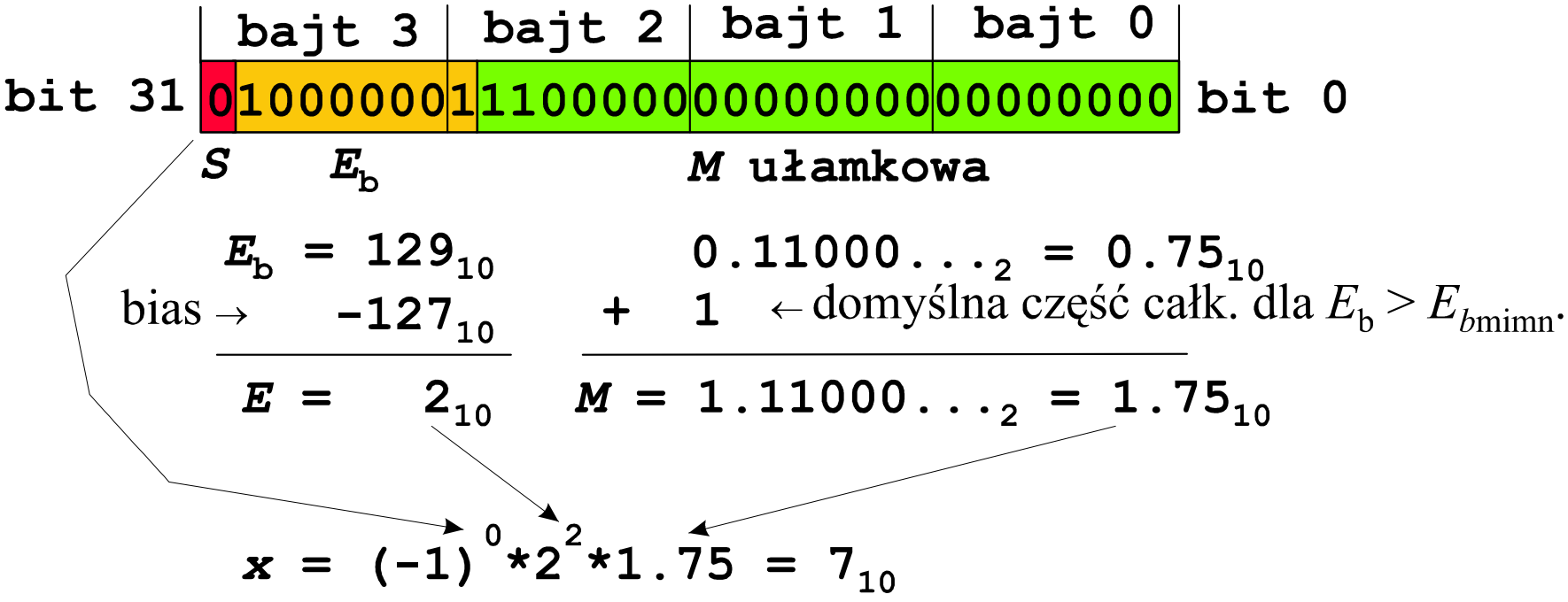
Liczba cyfr znaczących w zapisie dziesiętnym: 15...16.



Rys. 5.10. Format liczb zmiennoprzecinkowych IEEE 754 podwójnej precyzji.

Uwaga: w formatach IEEE 754 bit części całkowitej mantysy nie jest jawnie przechowywany – wartość tego bitu jest odtwarzana na podstawie wykładnika E_b

- M = 0.(część ułamkowa M) dla $E_b = E_{min}$ (0); $E = 1 - B$,
- M = 1.(część ułamkowa M) dla $E_b > E_{min}$ (0); $E = E_b - B$.



Rys. 5.11. Przykład kodowania liczby o wartości 7_{10} jako liczby zmiennoprzecinkowej pojedynczej precyzji zgodnej z IEEE 754.

Tabela 5.3. Reprezentacja binarna liczb zmiennoprzecinkowych w pojedynczej i podwójnej precyzji.

liczba	reprezentacja binarna			poza pamięcią
lub symbol	S	E_b	M - część ułamkowa	M - część całkowita
0	0/1	000...000	000...000	0
liczby zdenorm.	0/1	000...000 ... 000...000	111...111 ... 000...001	0
liczby znorm.	0/1	111...110 ... 000...001	111...111 ... 000...000	1
$\pm\infty$	0/1	111...111	000...000	1
NaN	0/1	111...111	111...111 ... 000...001	1

Ponadto w nowszych wydaniach normy oraz koprocesorów *x*87 odróżnia się nieliczby pasywne (ang. *quiet NaN*) oraz nieliczby aktywne (ang. *signaling NaN*). Nieliczby pasywne mogą być bezpiecznie używane jako argumenty operacji, natomiast użycie nieliczby aktywnej powoduje zgłoszenie wyjątku niedozwolonej operacji.

W językach C/C++ od wersji C99 i C++11 zdefiniowano funkcje do odróżniania przypadków szczególnych od poprawnych liczb zmiennopozycyjnych:

```
int isfinite(x);     // sprawdza czy argument jest liczbą skończoną i nie jest nie liczbą

int isinf(x);        // sprawdza czy argument jest nieskończony

int isnan(x);        // sprawdza czy argument jest nie liczbą

int isnormal(x);  // sprawdza czy argument jest liczbą znormalizowaną,
```

przy czym funkcje te istnieją w trzech wariantach dla argumentów typu:
float, double i long double.

Przykłady:

```
isnan(0.0 / 0.0);                // zwraca wynik 1 (true)

isnormal(DBL_MIN / 2);       // zwraca wynik 0 (false)

isinf(exp(800));                 // zwraca wynik 1 (true)
```

5.2.3. Niestandardowe typy zmiennoprzecinkowe

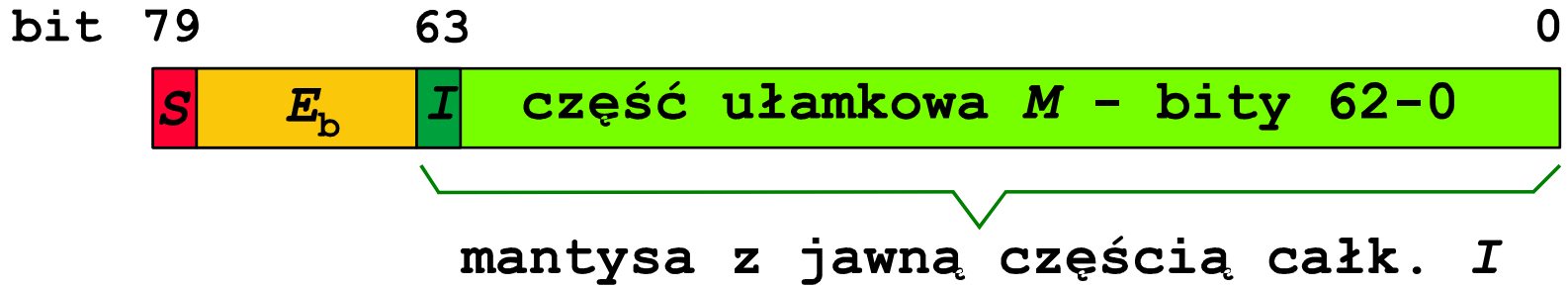
Przykład 1

Wewnętrzny format *extended precision* rejestrów koprocesora *x87* - można używać także w pamięci operacyjnej jako liczbę 80-bitową (1 bit znaku, 15 bitów wykładnika, 64 bitów mantysy).

Wartość liczby wyznacza się ze wzoru:

$$x = (-1)^S \cdot (I.M) \cdot 2^{(Eb - 16383)}. \qquad (5.9)$$

Liczba cyfr znaczących w zapisie dziesiętnym: 18...19.

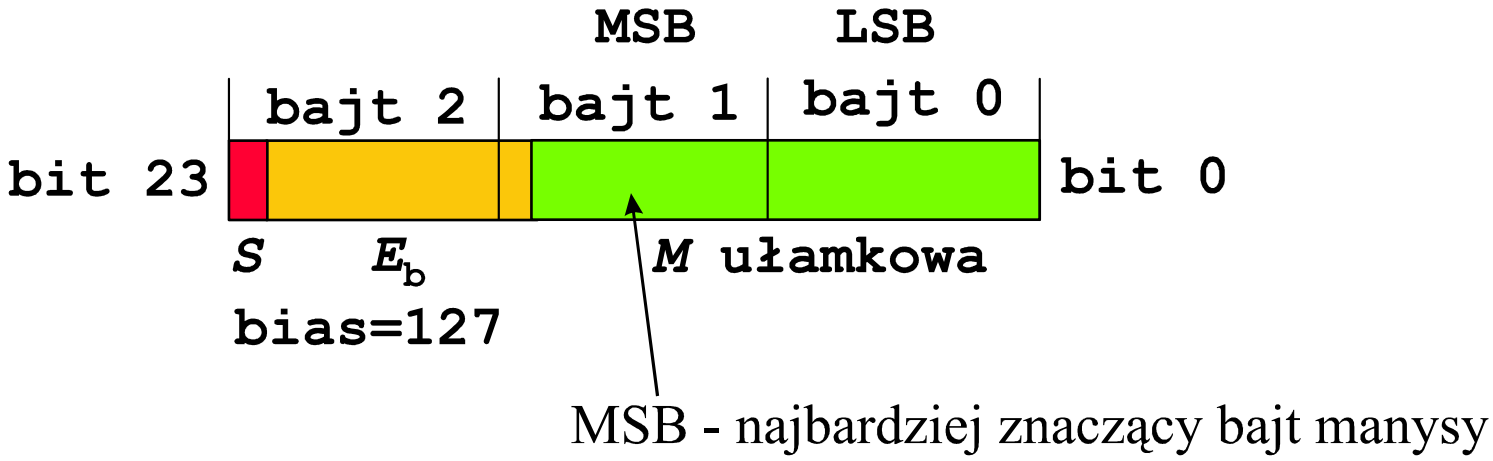


Rys. 5.12. Wewnętrzny format liczb zmiennoprzecinkowych w koprocesorach x87. Oznaczenia: *S* - znak, *EB* - wykładnik bez znaku w NKB z przesunięciem, **jawny bit *I* części całkowitej mantysy**, *M* – część ułamkowa mantysa w NKB.

Reguły rozróżniania liczb znormalizowanych, zdenormalizowanych, 0, ±∞, oraz NaN, są w znacznym stopniu zgodnie z normą IEEE754. Jawny bit *I* powoduje odróżnianie liczb nieznormalizowanych, które nie są tożsame z liczbami zdenormalizowanymi.

Przykład 2

Zmodyfikowany typ float IEEE 754 w kompilatorze dla mikrokontrolerów 8-bitowych HI-Tech C for the PIC 10/12/16 MCU Family.
Ten typ danych skrócono do 24-bitów przez obcięcie najmniej znaczących bitów mantysy.

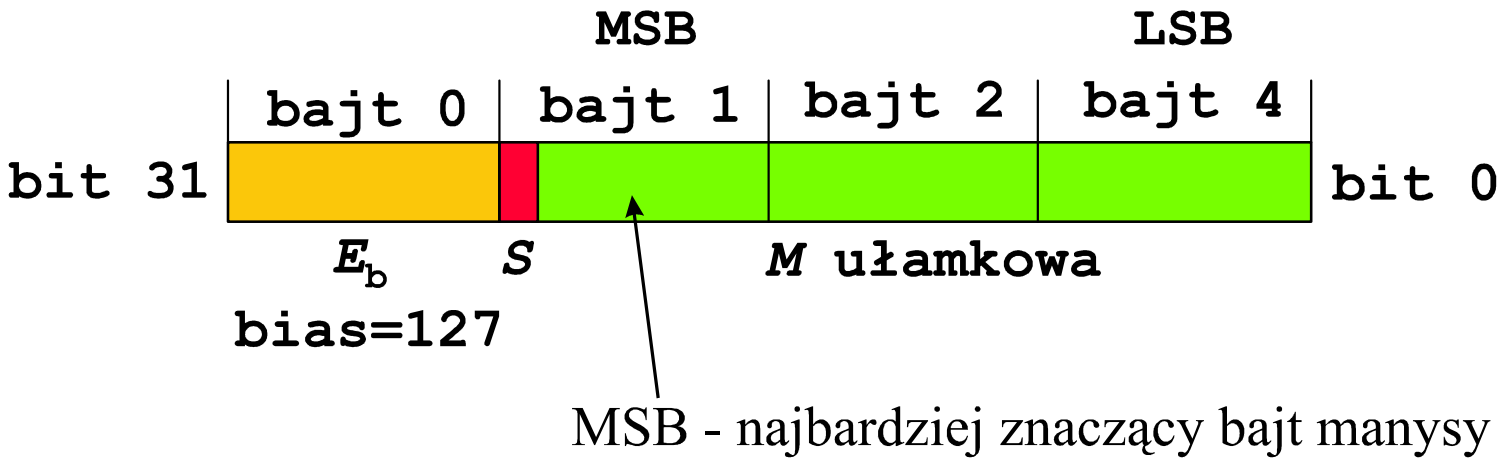


Rys. 5.13. Format 24-bitowych (1 bit znaku, 8 bitów wykładnika, 15 bitów mantysy) liczb zmiennoprzecinkowych opracowany przez skrócenie formatu IEEE 754 pojedynczej precyzji.

W kompilatorze HI-Tech C for the PIC 10/12/16 MCU Family dostępny jest także 32-bitowy typ danych zgodny z IEEE 754.

Przykład 2

Typ float w CCS C Compiler for PIC 12/14/16/18. Zachowano daleko idącą zgodność z IEEE 754 z wyjątkiem przesunięć składników.



Rys. 5.14. Niestandardowy format 32-bitowych liczb zmiennoprzecinkowych pojedynczej precyzji. Przesunięcie wykładnika *E* oraz bitu znaku *S*, wprowadzono w celu przyspieszenia obliczeń w 8-bitowej jednostce arytmetyczno-logicznej.

5.3. Kolejność zapisu bajtów liczb wielobajtowych

Kolejność poszczególnych bajtów liczb wielobitowych przechowywanych w pamięci operacyjnej systemu mikroprocesorowego zależy od budowy jednostki centralnej CPU/MPU. W praktyce występują najczęściej trzy główne przypadki:

- *little-endian* (Intel x86, x86-64, VAX)
  najmniej znaczący bajt pod najniższym adresem,

- *big-endian* (Motorolla 680xx)
  najmniej znaczący bajt pod najwyższym adresem,

- *bi-endian* (Alpha, Intel Itanium, MIPS, PowerPC, ARM od wersji 3)
  sprzętowe wsparcie dla obu kolejności *little-endian* i *bi-endian*.

W prostych systemach 8-bitowych kolejność jest określona przez oprogramowanie, np.

- w kompilatorze HI-Tech C for the PIC 10/12/16 MCU Family
  little-endian – wszystkie typy całkowite i zmiennoprzecinkowe,

- w CCS C Compiler for PIC 12/14/16/18
  little-endian – wszystkie typy całkowitoliczbowe,
  big-endian – typ zmiennoprzecinkowy float.

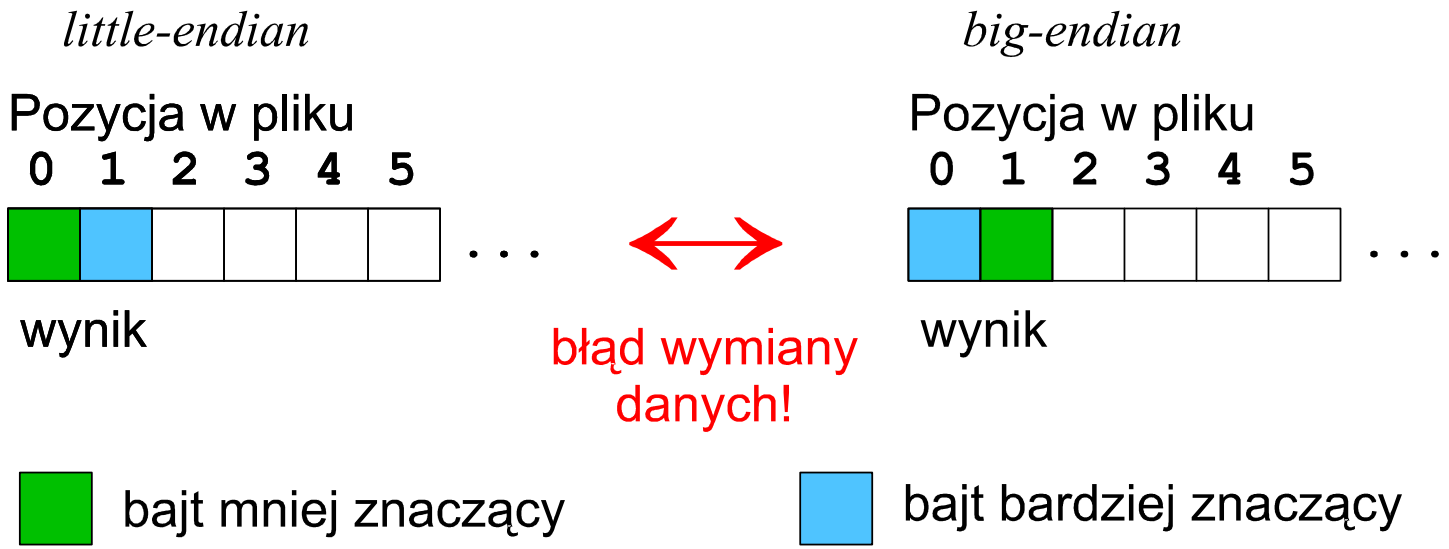
Różnice w kolejności zapisu bajtów utrudniają przenoszenie między systemami zarówno plików źródłowych oprogramowania jak i danych zapisanych w postaci binarnej.

Przykład nieprzenośnego źródła programu w języku C

```
/* wersja dla little-endian */
union {
   unsigned short val;
   unsigned char bajty[2];
} uval;

/* pobierz mniej znaczący bajt */
uval.bajty[0] = pomiar_lo();

/* pobierz bardziej znaczący bajt */
uval.bajty[1] = pomiar_hi();
obliczenia(uval.val);
```

```
/* wersja dla big-endian */
union {
   unsigned short val;
   unsigned char bajty[2];
} uval;

/* pobierz mniej znaczący bajt */
uval.bajty[1] = pomiar_lo();

/* pobierz bardziej znaczący bajt */
uval.bajty[0] = pomiar_hi();
obliczenia(uval.val);
```

Przykład niezgodności na poziomie wymiany danych w plikach binarnych.



Rys. 5.15. Ryzyko błędnej wymiany danych w plikach między systemami *little-endian* oraz *big-endian*. Oba pliki zostały zapisane przy użyciu programów identycznych na poziomie kodu źródłowego.

Tekst źródłowy programu do przykładu na rys. 2.15.

```
unsigned short wynik = pobierz_pomiar();

/* Otwórz plik binarny do zapisu */
FILE * f = fopen("C:\\pomiary\\wyniki1.bin", "wb");

fwrite(&wynik, sizeof(wynik), 1, f);
...
```

Przykładowe środki zaradcze na problemy z kolejnością zapisu bajtów:

1. Wymiana danych poprzez pliki tekstowe ASCII.
2. Zdefiniowanie jednego formatu pliku i przygotowanie osobnych wersji programu dla systemów *little-endian* i *big-endian*.
3. Przygotowanie jednej wersji programu dla maszyny wirtualnej. W Javie dane są zapisywane do plików binarnych w kolejności *big-endian* niezależnie od sprzętu. Otrzymanie innej kolejności wymaga operacji jawnie zapisanych w programie.

5.4. Literatura

[1] H. Kamionka-Mikuła, H. Małysiak, B. Pochopień, *Synteza i analiza układów cyfrowych*, Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skamierskiego, Gliwice 2006.

[2] M. Tuszyński, R. Goczyński, *Koprocesory 80287, 80387 oraz i486*, Komputerowa Oficyna Wydawnicza „Help”, Warszawa 1992.

[3] P. Prinz, T. Crawford, *Język C w pigułce*, APN Promise, Warszawa 2016.

[4] P. Misiurewicz, *Układy automatyki cyfrowej*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa, 1984.

[5] A. Barczak, J. Florek, T. Sydoruk, *Elektroniczne techniki cyfrowe*, VIZJA PRESS&IT Sp. z o.o., Warszawa 2006.

[6] A. Skorupski, *Podstawy techniki cyfrowej*, WKiŁ, Warszawa 2004.

[7] Dokumentacja kompilatorów *HI-Tech C for the PIC 10/12/16 MCU* oraz *CCS C Compiler for PIC 12/14/16/18* (w zainstalowanych kompilatorach).