

ŁUKASZ PISKORSKI<sup>1</sup>

## MODELOWANIE AZOTKOWYCH LASERÓW O EMISJI KRAWĘDZIOWEJ, W KTÓRYCH ZASTOSOWANO PODEJŚCIE SUPERSYMETRYCZNE

<sup>1</sup> Photonics Group, Institute of Physics, Lodz University of Technology, ul. Wólczańska 217/221, 93-005 Łódź, Poland

*Zwiększenie mocy laserów półprzewodnikowych zwykle wiąże się z poszerzaniem obszaru czynnego, w którym generowane jest promieniowanie. Prowadzi to jednak do przejścia pracy z trybu jednomodowego do wielomodowego, co w wielu zastosowaniach jest niepożądane. Dlatego poszukuje się rozwiązań pozwalających na jednoczesne uzyskanie wysokiej mocy i stabilnej pracy w trybie pojedynczego modu poprzecznego. Jednym z obiecujących kierunków jest podejście supersymetryczne, wynikające z analogii pomiędzy równaniami Schrödingera i Helmholtza, które znalazło zastosowanie w optyce falowej i umożliwia skuteczne tłumienie modów wyższego rzędu.*

*W niniejszej pracy podejście supersymetryczne zostało zastosowane w strukturze bazującej na azotkowym laserze o emisji krawędziowej emitującym światło niebieskie o długości fali 430 nm. W pracy badany jest wpływ parametrów geometrycznych struktury oraz parametrów warstwy czynnej na skuteczną dyskryminację modów wyższego rzędu w strukturze z dwoma falowodami grzbietowymi. Do tej pory w literaturze przedstawiono podobne analizy dla laserów arsenkowych i fosforkowych, natomiast podejście supersymetryczne w przypadku laserów azotkowych nie zostało jeszcze dokładnie zbadane.*

*Otrzymane wyniki wskazują, że zastosowanie podejścia supersymetrycznego w azotkowych laserach o emisji krawędziowej umożliwia uzyskanie pracy w trybie pojedynczego modu poprzecznego również przy szerszym obszarze czynnym. Parametr zwany względną separacją modów, zastosowany do porównania badanych laserów, osiągnął w supersymetrycznej strukturze wartość około 3,5, co oznacza, że separacja modów jest ponad trzykrotnie większa niż w strukturze referencyjnej z pojedynczym falowodem grzbietowym. Wynik ten wskazuje, że struktury oparte na podejściu supersymetrycznym mogą stanowić szczególnie korzystne rozwiązania w projektowaniu przyrządów przeznaczonych do zastosowań wymagających wyższej mocy optycznej.*

**Słowa kluczowe:** lasery półprzewodnikowe, symulacja komputerowa, model numeryczny, półprzewodnikowe materiały azotkowe, modelowanie zjawisk optycznych

### 1. WSTĘP

Lasery azotkowe o dużej mocy, emitujące promieniowanie w postaci wiązki gaussowskiej o małej rozbieżności, stanowią atrakcyjne źródło światła do wielu zastosowań. Wykorzystywane są m.in. w chirurgii laserowej [1], obróbce materiałów [2] i druku 3D [3].

---

\*lukasz.piskorski@p.lodz.pl

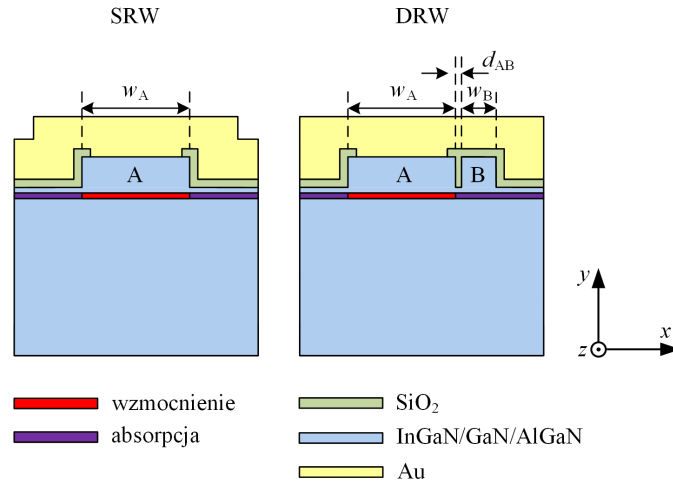
Uzyskanie akcji laserowej na pojedynczym modzie poprzecznym w laserach o emisji krawędziowej jest zazwyczaj możliwe dzięki zastosowaniu wąskiego falowodu grzbietowego [4] lub falowodu grzbietowego otrzymanego poprzez płytkie trawienie struktury [5]. Efekt falowodowy w takich laserach występuje w kierunku poprzecznym, ponieważ efektywny współczynnik załamania w obszarze falowodu grzbietowego jest wyższy niż w obszarach z nim sąsiadujących. Wąski falowód grzbietowy ogranicza mod podstawowy i jednocześnie tłumi lub eliminuje mody wyższego rzędu. Takie rozwiązanie ma jednak swoje wady. Powierzchnia przez którą prąd jest wstrzykiwany do warstwy czynnej ze studniami kwantowymi jest wtedy niewielka, co ogranicza objętość obszaru czynnego i obniża moc optyczną lasera. Dodatkowo wąski obszar czynny przekłada się na wysoką gęstość mocy cieplnej, przez co odprowadzanie ciepła staje się problematyczne. Sytuacja jest inna w przypadku płytkiego falowodu grzbietowego, który wprowadza jedynie niewielki skok współczynnika załamania w kierunku poprzecznym. Pozwala to na tłumienie modów wyższego rzędu również w strukturach z szerszymi falowodami grzbietowymi, co sprzyja pracy jednomodowej i daje szansę uzyskania większej mocy optycznej. Z drugiej jednak strony, słabszy efekt falowodowy przekłada się na wyższe wartości prądu progowego. Obserwuje się wtedy wzrost temperatury, która wpływa na wartości współczynników załamania użytych materiałów. Otrzymany w ten sposób rozkład tej wielkości wzmacnia efekt falowodowy i sprzyja powstawaniu modów wyższego rzędu. W efekcie praca lasera staje się wielomodowa [6].

Aby obejść te ograniczenia i uzyskać pracę jednomodową na modzie podstawowym, w niniejszej pracy wykorzystano sprzężenie optyczne pomiędzy sąsiednimi falowodami grzbietowymi — rozwiązanie znane jako podejście supersymetryczne. Koncepcja supersymetrii narodziła się w fizyce cząstek, później była rozwijana w mechanice kwantowej, a dzięki analogii pomiędzy równaniami Schrödingera i Helmholtza znalazła również zastosowanie w optyce falowej [7], szczególnie w układach sprzężonych falowodów [8], gdzie charakterystyka modowa zależy od sposobu ich sprzężenia. Klasycznym przykładem działania supersymetrii jest tu para sprzężonych falowodów o różnych parametrach, w której wszystkie mody mają te same stałe propagacji w obu falowodach [9]. Wyjątek stanowi mod podstawowy w pierwszym z falowodów, który nie posiada odpowiednika w drugim. W rezultacie wszystkie mody mające swoje odpowiedniki propagują się w obu falowodach, a tylko mod podstawowy pozostaje zlokalizowany w pierwszym falowodzie.

W niniejszej pracy podejście supersymetryczne zostało zastosowane w azotkowym laserze o emisji krawędziowej (rysunek 1), aby uzyskać lepsze parametry pracy na modzie podstawowym. Struktura takiego lasera, dalej nazywana DRW (ang. *double-ridge waveguide* — struktura z podwójnym falowodem grzbietowym), składa się z dwóch falowodów: szerszego (A) i węższego (B). Dla porównania analizowana jest również klasyczna struktura z pojedynczym falowodem grzbietowym, dalej nazywana SRW (ang. *single-ridge waveguide* — struktura z pojedynczym falowodem grzbietowym). Obszary znajdujące się pod falowodami grzbietowymi będą nazywane aper turami.

W strukturze DRW, jeśli szerokości falowodów grzbietowych A i B zostaną do-

brane tak, aby tryby wyższego rzędu w A miały te same współczynniki załamania co tryby w B, wówczas ulegają one sprzężeniu a ich rozkłady rozpraszają się w obu aperturach. Tryb podstawowy, który nie ma odpowiednika w falowodzie B, pozostaje ograniczony do falowodu A. W pracy tryby w strukturach SRW i DRW będą oznaczane odpowiednio  $TE_i^{SRW}$  i  $TE_i^{DRW}$ , przy czym  $i = 0$  będzie stosowane dla trybu podstawowego, a liczby dodatnie dla  $i$  będą stosowane dla trybów wyższego rzędu. Ponieważ badania opisane w pracy skupiają się głównie na dyskryminacji trybów, sposób ich numerowania nie ma wpływu na wyniki. Przyjęta została prosta zasada: wyższe tryby będą porządkowane malejąco według części rzeczywistej efektywnego współczynnika załamania.



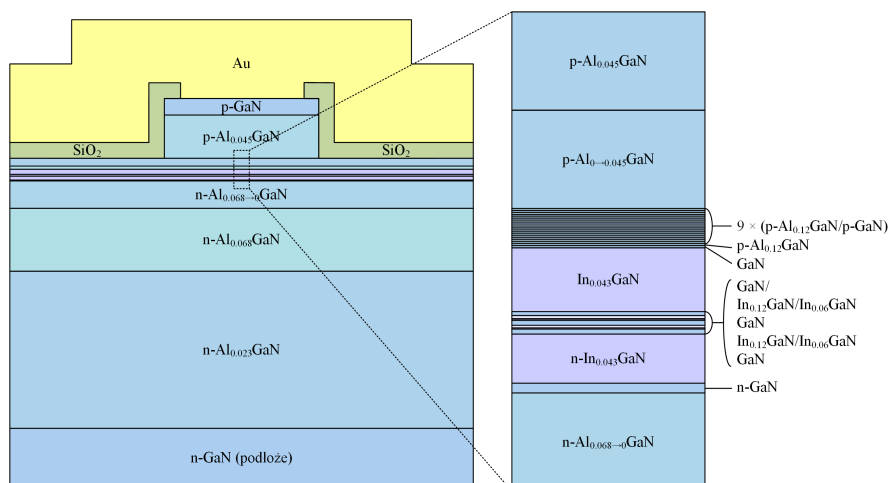
Rysunek 1. Schematyczne przedstawienie struktur laserów krawędziowych z pojedynczym (SRW) i podwójnym (DRW) falowodem grzbietowym, badanych w niniejszej pracy, wraz z układem współrzędnych zastosowanym w analizie. Oznaczenia:  $w_A$ ,  $w_B$  — szerokości falowodów A i B;  $d_{AB}$  — odległość między falowodami A i B

Źródło: opracowanie własne.

W pracy badany jest wpływ szerokości falowodu B, który zapewnia skuteczną dyskryminację trybów wyższego rzędu w strukturze DRW. Analizowany jest także wpływ części urojonej współczynnika załamania w warstwie czynnej. Rozkład tej wielkości zależy od wartości wzmocnienia i absorpcji przyjętych w warstwach studni kwantowych. Do tej pory w literaturze opisano podobne analizy dla laserów arsenkowych [10–12] i fosforkowych [13], natomiast podejście supersymetryczne w przypadku laserów azotkowych nie zostało jeszcze dokładnie zbadane. Materiały azotkowe wyróżniają się mniejszym kontrastem współczynnika załamania niż materiały arsenkowe i fosforkowe, a także krótszą długością fali emitowanego promieniowania.

## 2. MODELOWANA STRUKTURA

Struktura wyjściowa do badań teoretycznych stanowiących przedmiot niniejszej pracy to półprzewodnikowy laser azotkowy o emisji krawędziowej typu *ridge-waveguide* (z falowodem grzbietowym) z obszarem czynnym w postaci studni kwantowych In-GaN/GaN generujący promieniowanie o długości fali 430 nm. Obecna technologia umożliwia wytwarzanie takich struktur, czego potwierdzeniem są zmierzone eksperymentalnie charakterystyka prądowo-napięciowa oraz charakterystyka wyjściowej mocy optycznej w funkcji prądu, które zostały zaprezentowane w [14]. Modelowana struktura wyjściowa, schematycznie przedstawiona na rysunku 2, bazuje na strukturze pojedynczego emitera przedstawionego w [14] zaprojektowanego do emisji promieniowania o długości fali 430 nm i jest podobna do konstrukcji opisanych w [15–17], które opracowano tak, by w temperaturze pokojowej generowały światło niebieskie o długości fali z przedziału 442–450 nm.



Rysunek 2. Schemat struktury lasera półprzewodnikowego o emisji krawędziowej typu *ridge-waveguide* z obszarem czynnym InGaN/GaN. W celu lepszego uwidocznienia szczegółów konstrukcji pokazano jedynie niewielką część podłoża oraz ograniczono szerokość fragmentu struktury do 6  $\mu\text{m}$ . Prawą część rysunku, ukazującą fragment struktury obejmujący warstwy o małej grubości, przedstawiono w powiększeniu, w innej skali niż część lewą. Dla uproszczenia zapisu, na rysunku oraz w dalszej części pracy skład materiałowy dla materiałów AlGaN oraz InGaN podawany jest wyłącznie poprzez wartość określającą zawartość Al lub In. Zawartość Ga równa jest różnicy 1 i zawartości Al lub In

Źródło: opracowanie własne.

Szczegóły budowy struktury wyjściowej takie jak materiały z których wykonano warstwy, typ domieszkowania i koncentracja domieszki, grubości warstw przedstawiono w tabeli 1. W celu uzyskania falowodu grzbietowego wytrawiono warstwę podkontaktową wykonaną z p-GaN i wykonaną z p-Al<sub>0,045</sub>GaN część warstwy okładkowej

Tabela 1. Szczegóły struktury lasera półprzewodnikowego o emisji krawędziowej typu *ridge-waveguide* z obszarem czynnym InGaN/GaN. W tabeli pominięte zostały grubości warstw znajdujących się po dolnej stronie podłoża, ponieważ obliczenia stanowiące przedmiot niniejszej pracy skupiają się na modelowaniu zjawisk optycznych, co umożliwia ograniczenie struktury od dołu tak, że jedynie niewielki fragment podłoża jest uwzględniany w obliczeniach

| Element lasera                         | Materiał                                                                  | Koncentracja domieszki<br>[ $10^{18} \text{ cm}^{-3}$ ] | Grubość [nm]           |
|----------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|------------------------|
| kontakt metaliczny                     | Au                                                                        | —                                                       | 1000                   |
| izolacja tlenkowa                      | SiO <sub>2</sub>                                                          | —                                                       | 200                    |
| warstwa podkontaktowa                  | GaN:Mg                                                                    | 5,0                                                     | 210                    |
| warstwa okładkowa                      | Al <sub>0,045</sub> GaN:Mg                                                | 5,0                                                     | 550                    |
| warstwa okładkowa                      | Al <sub>0→0,045</sub> GaN:Mg                                              | 2,0 → 5,0                                               | 100                    |
| warstwa blokująca<br>ucieczkę nośników | 9 × (GaN:Mg /<br>Al <sub>0,12</sub> GaN:Mg)<br>Al <sub>0,12</sub> GaN:Mg) | 40,0                                                    | 9 × (2,0 / 2,0)<br>2,0 |
| warstwa dystansująca                   | GaN                                                                       | —                                                       | 2,0                    |
| warstwa falowodowa                     | In <sub>0,043</sub> GaN                                                   | —                                                       | 65,0                   |
| bariera                                | GaN                                                                       | —                                                       | 4,0                    |
| studnia kwantowa<br>(głęboka/płytki)   | In <sub>0,12</sub> GaN /<br>In <sub>0,06</sub> GaN                        | —                                                       | 3,1 / 1,3              |
| bariera                                | GaN                                                                       | —                                                       | 5,0                    |
| studnia kwantowa<br>(głęboka/płytki)   | In <sub>0,12</sub> GaN /<br>In <sub>0,06</sub> GaN                        | —                                                       | 3,1 / 1,3              |
| bariera                                | GaN                                                                       | —                                                       | 5,0                    |
| warstwa falowodowa                     | In <sub>0,043</sub> GaN:Si                                                | 2,0                                                     | 50,0                   |
| warstwa dystansująca                   | GaN:Si                                                                    | 5,0                                                     | 10,0                   |
| warstwa okładkowa                      | Al <sub>0,068→0</sub> GaN:Si                                              | 5,0                                                     | 350                    |
| warstwa okładkowa                      | Al <sub>0,068</sub> GaN:Si                                                | 5,0                                                     | 800                    |
| warstwa buforowa                       | Al <sub>0,023</sub> GaN:Si                                                | 5,0                                                     | 2000                   |
| podłoże                                | GaN:Si                                                                    | 5,0                                                     | $3 \times 10^5$        |

Źródło: opracowanie własne na podstawie [14].

typu p na głębokość 710 nm. W kierunku bocznym pozostawiona jest mesa o szerokości 2,0 μm. Długość emitera opisanego w [14] to 900 μm, ale w prezentowanych tu obliczeniach nie ma ona znaczenia, ponieważ dotyczą one przypadku dwuwymiarowego, ograniczonego do płaszczyzny przedstawionej na rysunku 2. Izolacja tlenkowa, która pokrywa obszary odsłonięte w wyniku trawienia, wykonana jest z amorficznego SiO<sub>2</sub> i ma grubość 200 nm. W obliczeniach przyjęto, że warstwa ta częściowo

pokrywa falowód, zachodząc na niego na odległość równą swojej grubości. W modelowanej strukturze nad tą warstwą znajduje się warstwa złota o grubości 1  $\mu\text{m}$ , która ma kontakt z warstwą podkontaktową jedynie od górnej strony falowodu grzbietowego.

Obszar czynny modelowanego lasera jest niedomieszkowany (patrz: tabela 1) i został wykonany w postaci dwóch studni kwantowych wykonanych z InGa<sub>N</sub> rozdzielonych barierami wykonanymi z Ga<sub>N</sub>. Na każdą ze studni składają się dwie warstwy In<sub>0,06</sub>Ga<sub>N</sub> o grubości 1,3 nm i In<sub>0,12</sub>Ga<sub>N</sub> o grubości 3,1 nm. Całkowita grubość obszaru czynnego to 22,8 nm, ale niedomieszkowany obszar nie ogranicza się jedynie do obszaru czynnego. Zaliczają się do niego jeszcze dwie warstwy znajdujące się nad górną barierą: warstwa falowodowa o grubości 65 nm wykonana z In<sub>0,043</sub>Ga<sub>N</sub> i cienka (2 nm) warstwa utworzona z Ga<sub>N</sub>. W pracy [14] górna warstwa falowodowa jest domieszkowana, ale istnieją też prace [16–18], gdzie warstwy tej się nie domieszkuje, aby uniknąć strat optycznych spowodowanych dużą absorpcją promieniowania typową dla materiałów azotkowych typu p [19, 20]. Dopiero 67 nm nad obszarem czynnym znajduje się pierwsza warstwa typu p, która wraz z kilkunastoma kolejnymi cienkimi (2 nm) naprzemiennie ułożonymi warstwami p-Al<sub>0,12</sub>Ga<sub>N</sub> i p-Ga<sub>N</sub> tworzy obszar nazywany warstwą blokującą ucieczkę nośników z obszaru czynnego do warstw typu p. Obszar ten sąsiaduje od góry ze wcześniej wspomnianą warstwą okładkową typu p. Po przeciwnej stronie obszaru czynnego znajduje się warstwa falowodowa wykonana z In<sub>0,043</sub>Ga<sub>N</sub> typu n o grubości 50 nm. Kolejne warstwy to: wykonana z n-Ga<sub>N</sub> warstwa dystansująca, warstwa okładkowa typu n (część tej warstwy ma zmienny skład materiałowy umożliwiający płynne przejście od n-Al<sub>0,068</sub>Ga<sub>N</sub> do n-Ga<sub>N</sub>), warstwa buforowa wykonana z n-Al<sub>0,023</sub>Ga<sub>N</sub> i podłoże utworzone z n-Ga<sub>N</sub>.

W pracy [14], gdzie badania skupiają się na modelowaniu zagadnień cieplnych, nie zostały podane koncentracje domieszkowania. Do obliczeń będących przedmiotem niniejszej pracy, przyjęto, że koncentracja domieszki donorowej wynosi  $5 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$  [16]. Jedynym wyjątkiem jest dolna warstwa falowodowa, dla której założona została koncentracja  $2 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$  z uwagi na to, że warstwa ta sąsiaduje z obszarem czynnym i wprowadzenie domieszki o większej koncentracji domieszki może przekładać się na stosunkowo duże straty optyczne w tej warstwie. Dla warstwy podkontaktowej i górnej warstwy okładkowej przyjęto koncentrację domieszki wynoszącą  $5 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ . Dużo wyższa koncentracja domieszki wynosząca  $4 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$  [17] została przyjęta dla warstwy blokującej ucieczkę nośników. W przypadku górnej warstwy okładkowej o zmiennym składzie materiałowym założono, że wartość koncentracji domieszki zmienia się w sposób ciągły od  $2 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$  do  $5 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ .

### 3. MODEL NUMERYCZNY I PARAMETRY MATERIAŁOWE

Zjawiska optyczne w strukturach badanych w niniejszej pracy modelowane są przy użyciu metody admitancyjnej fal płaskich [21]. Metoda ta umożliwia obliczenie efektywnych współczynników załamania światła dla poszczególnych modów promieniowania i odpowiadające im przestrzenne rozkłady tych modów.

Wszystkie obliczenia, które zostały wykonane w ramach badań opisanych w ni-

niejszej pracy zostały przeprowadzone dla 150 fal płaskich. Wartość ta została określona na podstawie wstępnych obliczeń wykonanych dla struktury z jednym falowodem grzbietowym o szerokości  $5,5 \mu\text{m}$ . Szerokość ta jest prawie trzykrotnie większa niż w przypadku struktury wyjściowej, jednak mając na uwadze główną część obliczeń, która dotyczy struktury z dwoma falowodami grzbietowymi i jej optymalizacji, zdecydowano by wybór liczby fal płaskich został dokonany w oparciu o wartość łącznej szerokości falowodów, której można się spodziewać dla struktury zbliżonej do optymalnej. W celu uproszczenia sposobu generowania plików wsadowych do obliczeń, liczba fal płaskich dla głównych obliczeń nie zależy od łącznej szerokości okna obliczeniowego. Przez okno to rozumiany jest tutaj dwuwymiarowy obszar struktury lasera różniący się od tego ukazanego na rysunku 2 jedynie tym, że dolna krawędź tego obszaru przypada na miejsce styku warstwy buforowej i podłoża. W kierunku poziomym rozmiar okna obliczeniowego zależy od szerokości falowodu grzbietowego (w przypadku struktury z jednym falowodem) lub od łącznej szerokości dwóch falowodów grzbietowych i szerokości przerwy między tymi falowodami (w przypadku struktury z dwoma falowodami). Na szerokość okna obliczeniowego

Tabela 2. Wartości współczynnika załamania i współczynnika absorpcji obliczone dla materiałów składających się na modelowane w niniejszej pracy struktury. Wszystkie wartości podano dla długości fali  $430 \text{ nm}$  i temperatury  $300 \text{ K}$ . W przypadku warstw niedomieszkowanych, gdzie występuje nieintencjonalna domieszka, nie uwzględniono jej przy wyznaczeniu parametrów, ponieważ koncentracja takiej domieszki jest bardzo mała ( $\sim 1 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ ) [23]. Dla InGaN tworzącego studnie kwantowe przyjmowane są różne wartości wzmocnienia  $g_{\text{QW}}$  i absorpcji  $\alpha_{\text{QW}}$ , zależnie od położenia wzdłuż osi  $x$  (patrz: rys. 1)

| Materiał                         | Współczynnik załamania | Współczynnik absorpcji [ $\text{cm}^{-1}$ ] |
|----------------------------------|------------------------|---------------------------------------------|
| Au                               | 1,4763                 | $5,2998 \times 10^4$                        |
| SiO <sub>2</sub>                 | 1,4672                 | $2,0457 \times 10^{-2}$                     |
| GaN:Mg                           | 2,4689                 | 5                                           |
| Al <sub>0,045</sub> GaN:Mg       | 2,4512                 | 5                                           |
| Al <sub>0→0,045</sub> GaN:Mg     | 2,4709 → 2,4512        | 2 → 5                                       |
| GaN:Mg/Al <sub>0,12</sub> GaN:Mg | 40,0                   | 40                                          |
| In <sub>0,043</sub> GaN          | 2,5277                 | 0                                           |
| In <sub>0,12</sub> GaN           | 2,7491                 | $g_{\text{QW}}$ lub $\alpha_{\text{QW}}$    |
| In <sub>0,06</sub> GaN           | 2,5518                 | $g_{\text{QW}}$ lub $\alpha_{\text{QW}}$    |
| GaN                              | 2,4766                 | 0                                           |
| In <sub>0,043</sub> GaN:Si       | 2,5180                 | 2                                           |
| GaN:Si                           | 2,4669                 | 5                                           |
| Al <sub>0,068→0</sub> GaN:Si     | 2,4412 → 2,4669        | 5                                           |
| Al <sub>0,068</sub> GaN:Si       | 2,4412                 | 5                                           |
| Al <sub>0,023</sub> GaN:Si       | 2,4578                 | 5                                           |
| GaN:Si                           | 2,4669                 | 5                                           |

Źródło: opracowanie własne.

składa się także 30  $\mu\text{m}$ , które wynika z łącznej szerokości obszarów położonych obok falowodów grzbietowych. Do obszarów tych wnikają częściowo mody promieniowania wyznaczone przez model optyczny i ich pominięcie przełożyłoby się na przyjęcie warunków brzegowych (w postaci tzw. idealnie dopasowanych warstw o dużej absorpcji promieniowania [22]) w nieodpowiednim miejscu, co skutkowałoby uzyskaniem błędnych rozwiązań. Wstępne obliczenia pokazały, że 150 fal płaskich to minimalna ich liczba powyżej której obserwuje się jedynie znikome zmiany w wartości części urojonej efektywnych współczynników załamania światła powiązanych z modami promieniowania wyznaczonymi dla struktury wybranej do wstępnych obliczeń.

Wyznaczone dla temperatury pokojowej (300 K) parametry materiałowe (współczynnik absorpcji promieniowania i rzeczywista część współczynnika załamania zwana w dalszej części niniejszej pracy współczynnikiem załamania) stosowane w obliczeniach zamieszczone zostały w tabeli 2.

W celu wyznaczenia współczynników załamania w materiałach azotkowych przyjęto, że punktem wyjścia będą następujące zależności, które umożliwiają wyznaczenie tej wielkości dla materiału GaN w 298 K [24] dla energii fotonu  $E$  (w eV) z różnych zakresów (poniżej podano również odpowiadające im zakresy dla długości fali  $\lambda$ ) [25, 26]:

$$n_{\text{R,GaN}}(E) = 0,013914 E^4 - 0,096422 E^3 + 0,27318 E^2 - 0,27725 E + 2,3535, \quad (1)$$

$$1,000 \text{ eV} < E < 2,138 \text{ eV} \quad (580 \text{ nm} < \lambda < 1240 \text{ nm}),$$

$$n_{\text{R,GaN}}(E) = 0,1152 E^3 - 0,7955 E^2 + 1,959 E + 0,68, \quad (2)$$

$$2,138 \text{ eV} < E < 3,163 \text{ eV} \quad (392 \text{ nm} < \lambda < 580 \text{ nm}),$$

$$n_{\text{R,GaN}}(E) = 18,2292 E^3 - 174,6974 E^2 + 558,535 E - 593,164, \quad (3)$$

$$3,163 \text{ eV} < E < 3,351 \text{ eV} \quad (370 \text{ nm} < \lambda < 392 \text{ nm}),$$

$$n_{\text{R,GaN}}(E) = 33,63905 E^3 - 353,1446 E^2 + 1235,0168 E - 1436,09, \quad (4)$$

$$3,351 \text{ eV} < E < 3,532 \text{ eV} \quad (351 \text{ nm} < \lambda < 370 \text{ nm}),$$

$$n_{\text{R,GaN}}(E) = -0,72116 E^3 + 8,8092 E^2 - 35,8878 E + 51,335, \quad (5)$$

$$3,532 \text{ eV} < E < 4,100 \text{ eV} \quad (302 \text{ nm} < \lambda < 351 \text{ nm}),$$

$$n_{\text{R,GaN}}(E) = 0,351664 E^4 - 6,06337 E^3 + 39,2317 E^2 - 112,865 E + 124,358, \quad (6)$$

$$4,100 \text{ eV} < E < 4,500 \text{ eV} \quad (276 \text{ nm} < \lambda < 302 \text{ nm}).$$

W celu wykorzystania zależności (1)–(6) do obliczenia współczynnika załamania dla  $\text{Al}_x\text{GaN}$  oraz  $\text{In}_y\text{GaN}$  należy zmodyfikować wartość energii tak, aby uwzględnić różnicę pomiędzy przerwą energetyczną GaN oraz materiału potrójnego [27]. Dodatkowo można też uwzględnić zmiany współczynnika załamania wraz z temperaturą, a także te wynikające z różnych koncentracji nośników. Zależności na współczynniki załamania w materiałach azotkowych GaN, AlGaN i InGaN można wtedy zapisać w następujący sposób:

$$n_{\text{R,GaN}}(E, T, N) = n_{\text{R,GaN}}(E + \Delta E(E, T, N)), \quad (7)$$

$$n_{\text{R,AlGa}}(x, E, T, N) = n_{\text{R,GaN}}(E + \Delta E(x, E, T, N)), \quad (8)$$

$$n_{\text{R,InGa}}(y, E, T, N) = n_{\text{R,GaN}}(E + \Delta E(y, E, T, N)), \quad (9)$$

gdzie:

$$\Delta E(E, T, N) = E + \Delta E_1(T) + \Delta E_2(N), \quad (10)$$

$$\Delta E(x, E, T, N) = E + \Delta E_1(x, T) + \Delta E_2(N), \quad (11)$$

$$\Delta E(y, E, T, N) = E + \Delta E_1(y, T) + \Delta E_2(N), \quad (12)$$

$$\Delta E_1(T) = E_{\text{g,GaN}}(298 \text{ K}) - E_{\text{g,GaN}}(T), \quad (13)$$

$$\Delta E_1(x, T) = E_{\text{g,GaN}}(298 \text{ K}) - E_{\text{g,AlGa}}(x, T), \quad (14)$$

$$\Delta E_1(y, T) = E_{\text{g,GaN}}(298 \text{ K}) - E_{\text{g,InGa}}(y, T), \quad (15)$$

$$\Delta E_2(N) = -aN^{1/3}. \quad (16)$$

Wartość współczynnika  $a$  we wzorze (16) przyjęta w niniejszej pracy wynosi  $2,4 \times 10^{-8} \text{ eV cm}$  dla materiałów typu n [28] oraz  $1,9 \times 10^{-8} \text{ eV cm}$  dla materiałów typu p [23], a w celu obliczenia  $\Delta E_2$  należy podstawić za  $N$  koncentrację domieszki.

Wartości przerw energetycznych dla materiałów azotkowych dwuskładnikowych w danej temperaturze można obliczyć korzystając ze wzoru Varshniego [29]:

$$E_{\text{g}}(T) = E_{\text{g},0} - \frac{\alpha T^2}{T + \beta}, \quad (17)$$

gdzie  $E_{\text{g},0}$  to przerwa energetyczna dla  $T = 0 \text{ K}$ , a  $\alpha$  oraz  $\beta$  to parametry dopasowania. W przypadku materiałów trójskładnikowych wartości przerwy energetycznej wyznacza się za pomocą wzorów interpolacyjnych, które uwzględniają nieliniowe zmiany tej wielkości w zależności od składu materiałowego [30]:

$$E_{\text{g,AlGa}}(x, T) = xE_{\text{g,AlN}} + (1 - x)E_{\text{g,GaN}} - x(1 - x)C_{\text{AlGa}}, \quad (18)$$

$$E_{\text{g,InGa}}(y, T) = yE_{\text{g,InN}} + (1 - y)E_{\text{g,GaN}} - y(1 - y)C_{\text{InGa}}. \quad (19)$$

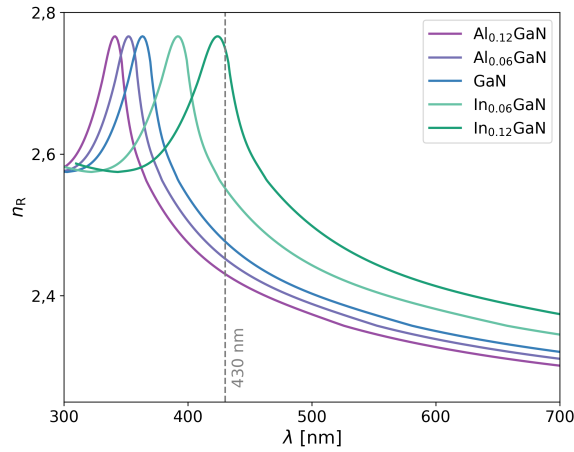
Wartości wszystkich parametrów niezbędnych do obliczenia przerwy energetycznej w materiałach GaN, AlGa i InGa o dowolnym składzie materiałowym zostały przedstawione w tabeli 3.

W celu zilustrowania ogólnego przebiegu zmian współczynnika załamania dla materiałów o składach mieszczących się w przedziale zastosowanym w strukturze wyjściowej, na rysunku 3 przedstawiono zależność współczynnika załamania w temperaturze 300 K od długości fali dla GaN, AlGa oraz InGa. Dokładne wartości współczynnika załamania użyte w dalszych obliczeniach, dla których przyjęto  $\lambda = 430 \text{ nm}$ , przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 3. Wartości parametrów niezbędnych do obliczenia przerwy energetycznej w materiałach GaN, AlGaIn i InGaIn dla zadanej temperatury

| Parametr                        | AlN   | GaN   | InN   | AlGaIn | InGaIn |
|---------------------------------|-------|-------|-------|--------|--------|
| $E_{g,0}$ [eV]                  | 6,100 | 3,510 | 0,690 | —      | —      |
| $\alpha$ [meV K <sup>-1</sup> ] | 2,63  | 0,914 | 0,414 | —      | —      |
| $\beta$ [K]                     | 2082  | 825   | 154   | —      | —      |
| $C$ [eV]                        | —     | —     | —     | 0,8    | 1,4    |

Źródło: opracowanie własne na podstawie [31].



Rysunek 3. Obliczone (dla 300 K) wartości współczynnika załamania  $n_R$  w zależności od długości fali  $\lambda$  dla niedomieszkowanych materiałów GaN, AlGaIn (Al: 6 %, 12 %) i InGaIn (In: 6 %, 12 %)

Źródło: opracowanie własne.

Wzory oraz wartości parametrów umożliwiające obliczenie współczynnika załamania dla amorficznego SiO<sub>2</sub> i złota można znaleźć w [32] oraz [33]. Dla powietrza przyjęto wartość współczynnika załamania równą 1 [34].

Do obliczeń współczynnika absorpcji promieniowania w materiałach azotkowych zastosowano prostą zależność liniową, w której wielkość ta jest proporcjonalna do koncentracji domieszki  $N$ :

$$\alpha(N) = AN, \quad (20)$$

i przyjęto, że wartość współczynnika proporcjonalności  $A$  wynosi  $10^{-18}$  cm<sup>2</sup>.

Według danych z [35], w warstwach typu p, które są silnie domieszkowane, absorpcja jest wyraźnie większa niż w warstwach typu n stosowanych w azotkowych laserach półprzewodnikowych. Wynika to z faktu, że energia aktywacji nośników w warstwach

typu n jest o rząd mniejsza niż w warstwach typu p [36,37], a tym samym do uzyskania odpowiedniej przewodności elektrycznej nie jest konieczne stosowanie wysokiej koncentracji domieszek.

Niewielkie wartości absorpcji obserwuje się również w warstwach niedomieszkowanych [38, 39]. Należy przy tym podkreślić, że w przypadku GaN w literaturze występują znaczne rozbieżności dla wartości współczynnika absorpcji nawet dla tych samych koncentracji i typu domieszki, jak również długości fali, co pokazują wyniki podane w [40, 41]. W związku z tym zasadne wydaje się stosowanie uproszczonego podejścia opartego na zależności (20), przy czym bardziej szczegółowa analiza numeryczna może obejmować obliczenia dla różnych wartości współczynnika  $A$ . Warto dodać, że identyczną postać zależności (20) podano w [42], gdzie badania dotyczą lasera emitującego światło zielone (520 nm), a przyjęta wartość współczynnika  $A$  wynosi  $2,5 \times 10^{-18} \text{ cm}^2$ .

Współczynnik absorpcji  $\alpha$  dla amorficznego  $\text{SiO}_2$  obliczany jest na podstawie współczynnika ekstynkcji  $k$  dla tego materiału ( $\alpha = 4\pi k/\lambda$ ), który dla długości fali  $\lambda$  z przedziału 400–460 nm wynosi 0,007 według danych zawartych w [43]. Wzory oraz wartości parametrów umożliwiające obliczenie współczynnika absorpcji dla złota można znaleźć w [33]. Dla powietrza przyjęto wartość współczynnika absorpcji równą 0.

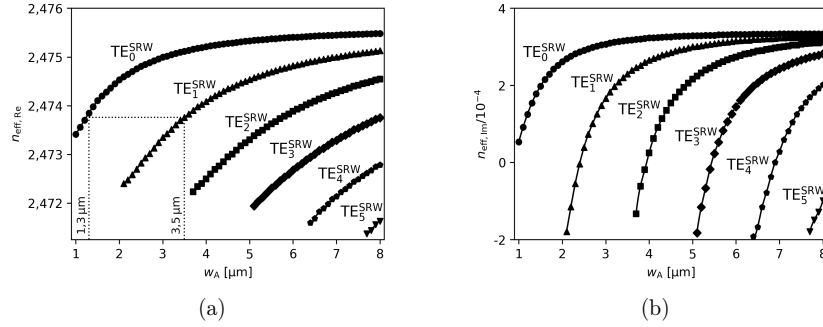
#### 4. WYNIKI SYMULACJI

Wyniki symulacji przedstawione w tej części uzyskano dla struktur laserowych zaprojektowanych do emisji promieniowania o długości fali  $\lambda = 430 \text{ nm}$ , opartych na strukturze opisanej w [14]. Materiały warstw oraz ich grubości w modelowanych strukturach zestawiono w tabeli 1. Przykładowe wartości parametrów optycznych, obliczone dla  $T = 300 \text{ K}$ , znajdują się w tabeli 2. Szerokości falowodów grzbietowych, a także wartości wzmocnienia  $g_{\text{QW}}$  i absorpcji  $\alpha_{\text{QW}}$  przyjęte w warstwie czynnej podano w podpisach pod rysunkami. Układ współrzędnych użyty do przedstawienia rozkładów modów promieniowania pokazano na rysunku 1.

Przy badaniu wpływu parametrów, takich jak szerokości falowodów A ( $w_A$ ) i B ( $w_B$ ) oraz wartości wzmocnienia  $g_{\text{QW}}$  i absorpcji  $\alpha_{\text{QW}}$ , parametry te były modyfikowane z wykorzystaniem określonego kroku:  $0,1 \mu\text{m}$  dla  $w_A$  i  $w_B$ ,  $5 \times 10^2 \text{ cm}^{-1}$  dla  $g_{\text{QW}}$  oraz  $1 \times 10^3 \text{ cm}^{-1}$  dla  $\alpha_{\text{QW}}$ . Na wykresach poszczególne punkty przedstawiają wyniki obliczeń, natomiast linie pokazują przewidywane wartości dla parametrów z badanego zakresu.

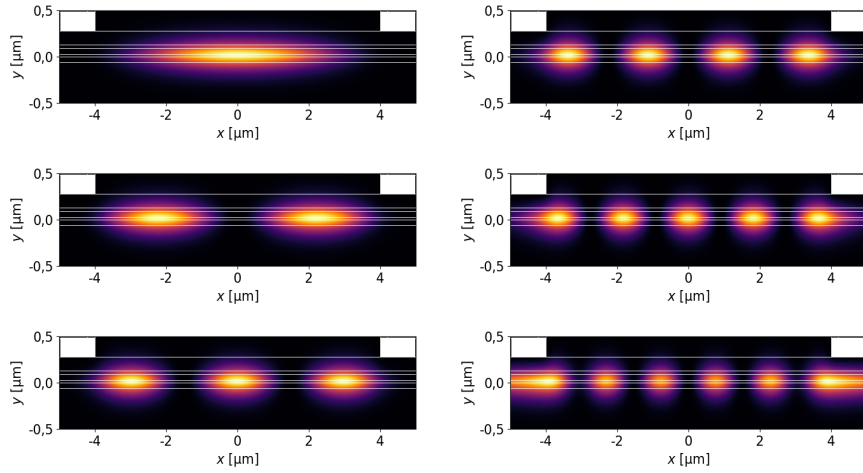
##### 4.1. Laser z pojedynczym falowodem grzbietowym

Kluczowym parametrem decydującym o liczbie modów poprzecznych w strukturze SRW jest szerokość falowodu grzbietowego. Rzeczywista i urojona część efektywnego współczynnika załamania  $n_{\text{eff}}$ , w zależności od szerokości falowodu, pokazane są na rysunku 4a i rysunku 4b. Dodatkowo, na rysunku 5 ukazane są przestrzenne rozkłady modów promieniowania dla struktury o szerokości grzbietu  $8,0 \mu\text{m}$ , która jest maksymalną szerokością falowodu, dla której wykonano obliczenia.



Rysunek 4. Rzeczywista (a) oraz urojona (b) część efektywnego współczynnika załamania w zależności od szerokości falowodu grzbietowego w strukturze SRW, obliczone dla  $g_{QW} = 3000 \text{ cm}^{-1}$  oraz  $\alpha_{QW} = 3000 \text{ cm}^{-1}$

*Źródło: opracowanie własne.*



Rysunek 5. Przestrzenne rozkłady modów promieniowania w strukturze SRW z falowodem grzbietowym o szerokości  $w_A = 8,0 \text{ μm}$ , obliczone dla  $g_{QW} = 3000 \text{ cm}^{-1}$  oraz  $\alpha_{QW} = 3000 \text{ cm}^{-1}$

*Źródło: opracowanie własne.*

Część urojona efektywnego współczynnika załamania,  $n_{\text{eff},\text{Im}}$ , jest proporcjonalna do wzmocnienia modowego  $g_m$  zgodnie ze wzorem:

$$g_m = \frac{4\pi}{\lambda} n_{\text{eff},\text{Im}}. \quad (21)$$

Jeżeli jej wartość jest dodatnia, oznacza to, że dla danego modu wszystkie możliwe straty optyczne są równoważone przez wzmocnienie materiałowe uzyskiwane

w obszarze czynnym. Tym samym spełniony jest warunek osiągnięcia progu akcji laserowej.

W przypadku, gdy dla danej szerokości falowodu może istnieć wiele modów poprzecznych, wartość wzmocnienia materiałowego decyduje o tym, ile z nich osiągnie próg. W rzeczywistości wzmocnienie materiałowe zależy od koncentracji nośników wynikającej z gęstości prądu elektrycznego, a emitowanie promieniowania laserowego jest procesem silnie nieliniowym, w którym dominującą rolę odgrywają przestrzenne i spektralne wypalanie nośników, co wpływa na liczbę modów w widmie światła laserowego.

Niemniej jednak różnice pomiędzy częściami urojonymi efektywnych współczynników załamania wyznaczonych dla poszczególnych modów można traktować jako wskaźnik różnic w prądzie wymaganym do osiągnięcia progu akcji laserowej dla tych modów. Z tego powodu zwiększanie różnicy pomiędzy częścią urojoną efektywnego współczynnika załamania dla modu podstawowego ( $n_{\text{eff,Im},0}$ ) a największą wartością tej wielkości spośród tych dla kolejnych modów ( $n_{\text{eff,Im},i}$ ) sprzyja pracy jednomodowej. (W przyjętej tutaj notacji indeks  $i$  jest dodatni dla modów wyższego rzędu oraz wynosi 0 dla modu podstawowego.)

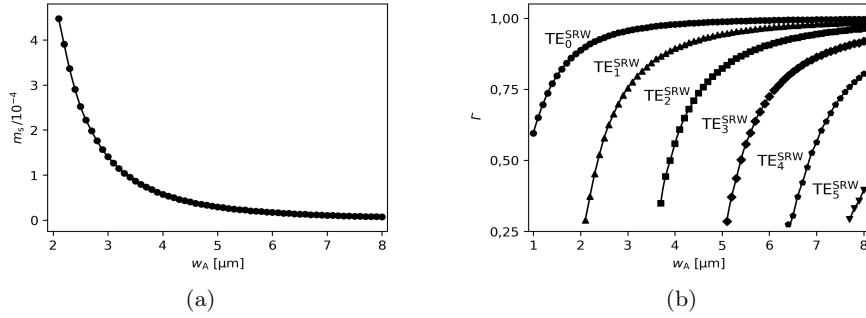
Wyniki przedstawione na rysunku 4 ukazują typową zależność [10,44], jaką można otrzymać dla lasera krawędziowego z falowodem grzbietowym: wraz ze wzrostem szerokości falowodu rośnie liczba modów poprzecznych w strukturze, a jednocześnie zmniejszają się straty optyczne pomiędzy poszczególnymi modami. Z rysunku 4 wynika, że praca wyłącznie na jednym modzie możliwa jest dla  $w_A < 2,1 \mu\text{m}$ , co odpowiada progu odcięcia modu  $\text{TE}_1^{\text{SRW}}$ . Dla założonego wzmocnienia w obszarze czynnym, które wynosi  $3000 \text{ cm}^{-1}$ , mod  $\text{TE}_1^{\text{SRW}}$  może zostać zaobserwowany w widmie promieniowania już dla  $w_A = 2,4 \mu\text{m}$ . W przedziale  $2,1 \mu\text{m} < w_A < 3,4 \mu\text{m}$  mod  $\text{TE}_1^{\text{SRW}}$  może pojawić się w widmie dopiero przy wyższych wartościach wzmocnienia w obszarze czynnym.

Aby opisać zdolność tłumienia modów wyższego rzędu, wprowadzona zostanie wielkość nazwana separacją modów ( $m_s$ ), zdefiniowana jako różnica pomiędzy częścią urojoną efektywnego współczynnika załamania modu podstawowego i częścią urojoną modu o kolejnej najwyższej wartości dla tej wielkości:

$$m_s = n_{\text{eff,Im},0} - n_{\text{eff,Im},i}. \quad (22)$$

Separacja modów pełni istotną rolę w analizie wyników dla struktury DRW, a jej wartości dla struktury SRW będą traktowane jako punkt odniesienia. Z tego względu pokazano je dla różnych szerokości falowodu grzbietowego na rysunku 6a.

Podstawowym czynnikiem decydującym o wartości różnic dla części urojonych efektywnego współczynnika załamania dla różnych modów jest to, jaka część pola optycznego przypada na silnie absorbujące obszary znajdujące się w warstwie czynnej poza aperturą dla grzbietu A, gdzie zachodzi absorpcja międzypasmowa. Dlatego w analizie tłumienia modów użyteczne jest wprowadzenie parametru opisującego, jaka część całkowitego pola optycznego w warstwie czynnej przypada na obszar apertury A. Parametr ten, nazywany dalej współczynnikiem ograniczenia modu  $\Gamma$ ,



Rysunek 6. Separacja modów (a) oraz współczynnik ograniczenia modu (b) w zależności od szerokości falowodu grzbietowego w strukturze SRW, obliczone dla  $g_{QW} = 3000 \text{ cm}^{-1}$  oraz  $\alpha_{QW} = 3000 \text{ cm}^{-1}$

Źródło: opracowanie własne.

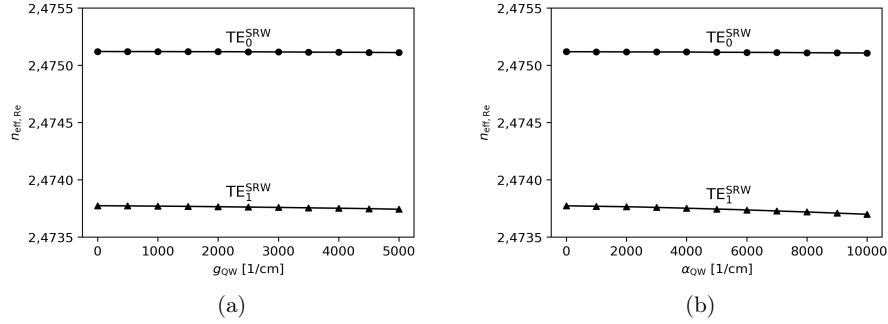
można wyrazić poprzez stosunek natężenia światła w części warstwy czynnej, która przypada na obszar apertury A, do całkowitego natężenia światła w tym obszarze warstwy czynnej, który został uwzględniony w obliczeniach:

$$\Gamma = \frac{\int_{x_{A1}}^{x_{A2}} I(x) dx}{\int_{x_{s1}}^{x_{s2}} I(x) dx}, \quad (23)$$

przy czym  $x_{A1}$  i  $x_{A2}$  wyznaczają odpowiednio lewą i prawą krawędź falowodu A (przy czym  $x_{A2} - x_{A1} = w_A$ ), a  $x_{s1}$  i  $x_{s2}$  oznaczają lewe i prawe granice całego obszaru obliczeniowego. Funkcja  $I(x)$  opisuje natężenie światła wzdłuż osi  $x$  dla wartości  $y$  odpowiadającej położeniu środka warstwy czynnej. Obliczone wartości współczynnika ograniczenia dla struktur SRW o różnych szerokościach falowodu grzbietowego przedstawiono na rysunku 6b.

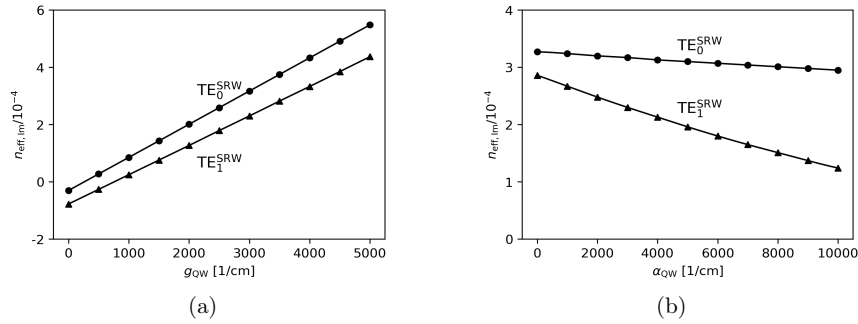
Projektując strukturę DRW w oparciu o podejście supersymetryczne, należy na początku ustalić szerokości falowodu A i obliczyć dla niej efektywne współczynniki załamania wszystkich modów. Następny krok polega na wyznaczeniu szerokości falowodu B, którego obecność pozwoli na znalezienie modu będącego odpowiednikiem modu wyższego rzędu z falowodu A. W przypadku dążenia do uzyskania jak najwyższej mocy emitowanego promieniowania przez strukturę DRW, należy poszukiwać największej szerokości falowodu A. Z uwagi na to, że celem niniejszej pracy jest jedynie przybliżenie tematu podejścia supersymetrycznego, obliczenia dla struktury DRW zostaną przedstawione dla przykładowej szerokości  $w_A = 3,5 \text{ μm}$ . Dla tej szerokości falowodu A, w oparciu o rysunek 4a, wybrana została szerokość falowodu  $w_B = 1,3 \text{ μm}$ , która będzie uwzględniona w większości obliczeń dla struktury DRW, opisanych w części 4.2 (Laser z podwójnym falowodem grzbietowym).

Przedmiotem analizy będzie również wpływ wartości wzmocnienia  $g_{QW}$  i absorpcji  $\alpha_{QW}$  w warstwie czynnej na możliwość sprzężenia modów. Wartości tych parametrów są powiązane z wartością części urojonej współczynnika załamania, przez co ich zmiany mogą wpływać na wartości efektywnych współczynników załamania poszczególnych modów.



Rysunek 7. Rzeczywista część efektywnego współczynnika załamania w zależności od wzmocnienia (a) oraz absorpcji (b) przyjętych w warstwach ze studniami kwantowymi w strukturze SRW z falowodem grzbietowym o szerokości 3,5  $\mu m$ , obliczone dla  $g_{QW} = 3000 \text{ cm}^{-1}$  oraz  $\alpha_{QW} = 3000 \text{ cm}^{-1}$

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 8. Urojona część efektywnego współczynnika załamania w zależności od wzmocnienia (a) oraz absorpcji (b) przyjętych w warstwach ze studniami kwantowymi w strukturze SRW z falowodem grzbietowym o szerokości 3,5  $\mu m$ , obliczone dla  $\alpha_{QW} = 3000 \text{ cm}^{-1}$  (a) oraz  $g_{QW} = 3000 \text{ cm}^{-1}$  (b)

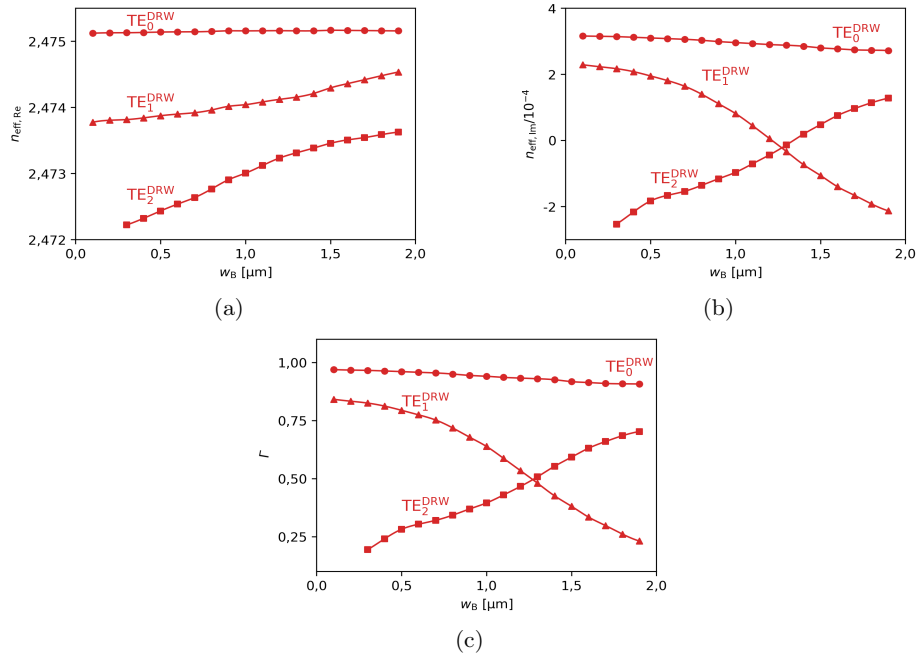
Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 7a i rysunku 7b pokazany został wpływ zmian przyjętych wartości wzmocnienia i absorpcji na część rzeczywistą efektywnego współczynnika załamania. Jak można zauważyć, wpływ ten jest znikomy, nawet pomimo tego, że różnice pomie-

dzy maksymalną a minimalną wartością wzmocnienia i absorpcji wynoszą odpowiednio  $5000 \text{ cm}^{-1}$  i  $10000 \text{ cm}^{-1}$ . Zmiany przyjętych wartości wzmocnienia i absorpcji wpływają jednak wyraźnie na część urojoną współczynnika załamania (rysunek 8a i rysunek 8b). Z tego powodu, przy projektowaniu struktury DRW w oparciu o podejście supersymetryczne, można przyjąć, że zmiany części urojonej współczynnika załamania nie wpływają znacząco na wybór optymalnych szerokości falowodów.

#### 4.2. Laser z podwójnym falowodem grzbietowym

W tej części przedstawione zostaną wyniki dla struktury DRW, dla których zbadany zostanie wpływ szerokości falowodu B, a także parametrów warstwy czynnej, na wielkości takie jak efektywne współczynniki załamania, separacje modów czy współczynniki ograniczenia. Strukturą wyjściową będzie struktura z falowodem A o szerokości  $w_A = 3,5 \mu\text{m}$  i falowodem B o szerokości  $w_B = 1,3 \mu\text{m}$ , ale rozważane będą struktury, gdzie szerokość falowodu B mieści się w przedziale od  $0,1 \mu\text{m}$  do  $2 \mu\text{m}$ . Wszystkie obliczenia wykonano dla odległości między falowodami wynoszącej  $d_{AB} = 0,1 \mu\text{m}$ .



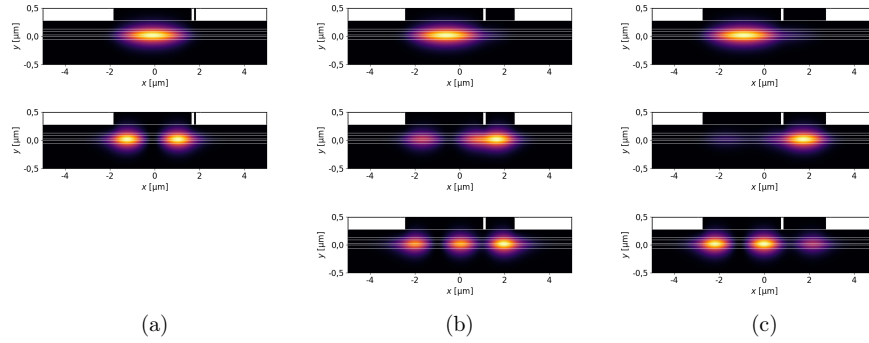
Rysunek 9. Rzeczywista (a) i urojona (b) część efektywnego współczynnika załamania oraz współczynnik ograniczenia modu (c) w zależności od szerokości falowodu grzbietowego B w strukturze DRW z falowodem grzbietowym A o szerokości  $3,5 \mu\text{m}$  obliczone dla

$$g_{\text{QW}} = 3000 \text{ cm}^{-1} \text{ i } \alpha_{\text{QW}} = 3000 \text{ cm}^{-1}$$

Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 9a i rysunku 9b przedstawiono wpływ zmiany szerokości falowodu B na części rzeczywistą i urojoną efektywnego współczynnika załamania, natomiast na rysunku 9c pokazany został wpływ szerokości falowodu B na współczynnik ograniczenia  $\Gamma$ . Wartość tego współczynnika pozwala na jednoznaczne wskazanie, gdzie są zlokalizowane mody. W przypadku, gdy  $w_B$  dąży do zera, wyniki dla struktury DRW z rysunku 9 stają się zbliżone do wyników dla struktury SRW o szerokości  $w_A = 3,5 \mu\text{m}$ , przedstawionych na rysunku 4 i rysunku 6. Dla  $w_B = 0 \mu\text{m}$  struktura DRW sprowadza się do struktury SRW, a na aperturę o szerokości  $3,5 \mu\text{m}$  przypadają jedynie dwa mody (rysunek 10a). Separacja pomiędzy tymi modami jest stosunkowo niewielka (patrz: rysunek 4b), co może prowadzić do wzbudzenia modu wyższego rzędu.

Na drugim krańcu rozważanego przedziału dla  $w_B$  szerokość falowodu B wynosi prawie  $2 \mu\text{m}$ . W takim przypadku rozkłady modów promieniowania są prawie całkowicie ograniczone do falowodu A lub falowodu B, a sprzężenie pomiędzy tymi modami jest niewielkie (rysunek 10c). Obecność dwóch modów ograniczonych do falowodu A przekłada się na niewielką separację pomiędzy nimi (rysunek 4b), przez co możliwe jest wzbudzenie w takiej strukturze modu wyższego rzędu.



Rysunek 10. Przestrzenne rozkłady modów promieniowania w strukturze DRW z falowodem grzbietowym A o szerokości  $3,5 \mu\text{m}$  i falowodem grzbietowym B o szerokości  $0,1 \mu\text{m}$  (a),  $1,3 \mu\text{m}$  (b) i  $1,9 \mu\text{m}$  (c) obliczone dla  $g_{\text{QW}} = 3000 \text{ cm}^{-1}$  i  $\alpha_{\text{QW}} = 3000 \text{ cm}^{-1}$

Źródło: opracowanie własne.

Aby rozwiązać problem ewentualnego wzbudzenia modów wyższego rzędu w strukturze DRW, gdzie niewielką separację modów obserwuje się zarówno dla bardzo małych, jak i dużych wartości  $w_B$ , zbadany został przypadek, w którym falowód B ma szerokość  $w_B = 1,3 \mu\text{m}$ . Jak wynika z rysunku 9b, szerokość ta powinna być bliska wartości optymalnej dla uzyskania efektu supersymetrii. W rozważanej strukturze DRW części rzeczywiste efektywnych współczynników załamania  $n_{\text{eff,Re}}$  dla modów  $\text{TE}_1^{\text{DRW}}$  i  $\text{TE}_2^{\text{DRW}}$  zbliżają się do siebie (rysunek 9a), gdy  $w_B$  dąży do  $1,4 \mu\text{m}$ , a minimalna różnica pomiędzy nimi wynosi wtedy  $8,3 \times 10^{-4}$ . Z kolei części urojone współczynników  $n_{\text{eff,Im}}$  (rysunek 9b) oraz współczynniki ograniczenia modów  $\Gamma$  (rysunek 9c) przecinają się dla  $w_B = 1,3 \mu\text{m}$ . Dla tej szerokości falowodu B sprzężone

mody mają podobne rozkłady pola promieniowania (rysunek 10b) i przestają być ograniczone do jednego falowodu. Dla  $w_B = 1,3 \mu\text{m}$  efektywne współczynniki załamania modów  $\text{TE}_1^{\text{DRW}}$  i  $\text{TE}_2^{\text{DRW}}$  mają niemal równe części urojone (różnica to  $2,0 \times 10^{-5}$ ), a różnica pomiędzy ich częściami rzeczywistymi jest prawie najmniejsza. Straty optyczne, wynikające z ujemnej części urojonej efektywnego współczynnika załamania ( $n_{\text{eff,Im},1}$  i  $n_{\text{eff,Im},2}$ ), osiągają maksimum dla obu tych modów, podczas gdy część urojona efektywnego współczynnika załamania dla modu podstawowego  $n_{\text{eff,Im},0}$  jest dodatnia (rysunek 9b), co wskazuje na możliwość uzyskania akcji laserowej. Co więcej, mod  $\text{TE}_0^{\text{DRW}}$ , zlokalizowany w falowodzie A, nie ulega istotnym zmianom przy modyfikacji grubości falowodu B w badanym zakresie. Maksymalna względna zmiana współczynnika ograniczenia dla tego modu, przyjmując wartość obliczoną dla  $w_B = 1,3 \mu\text{m}$  jako punkt odniesienia, wynosi jedynie 0,82 %. Umożliwia to stabilną pracę z jednym modem poprzecznym oraz uzyskanie wyższej mocy emitowanego promieniowania dzięki zastosowaniu szerszego falowodu i wykorzystaniu supersymetrii.

W części 4.1 (Laser z pojedynczym falowodem grzbietowym) do opisu tłumienia modów wyższego rzędu wprowadzona została wielkość zwana separacją modów. Poniżej znajduje się definicja innej wielkości, która może pełnić podobną rolę. Wielkość ta będzie nazywana względną separacją modów ( $m_{\text{sr}}$ ) i jest zdefiniowana następującym wzorem:

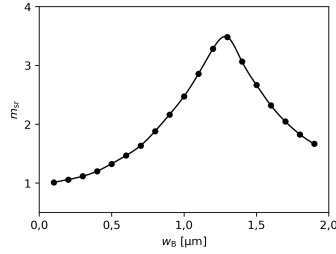
$$m_{\text{sr}} = m_{\text{s}} - m_{\text{s},w_A}, \quad (24)$$

gdzie  $m_{\text{s},w_A}$  oznacza separację modów obliczoną dla struktury SRW o szerokości grzbietu  $w_A$ . W odróżnieniu od separacji modów, względna separacja modów bezpośrednio informuje o stopniu poprawy w tłumieniu modów wyższego rzędu, wykorzystując jako punkt odniesienia wynik dla struktury SRW.

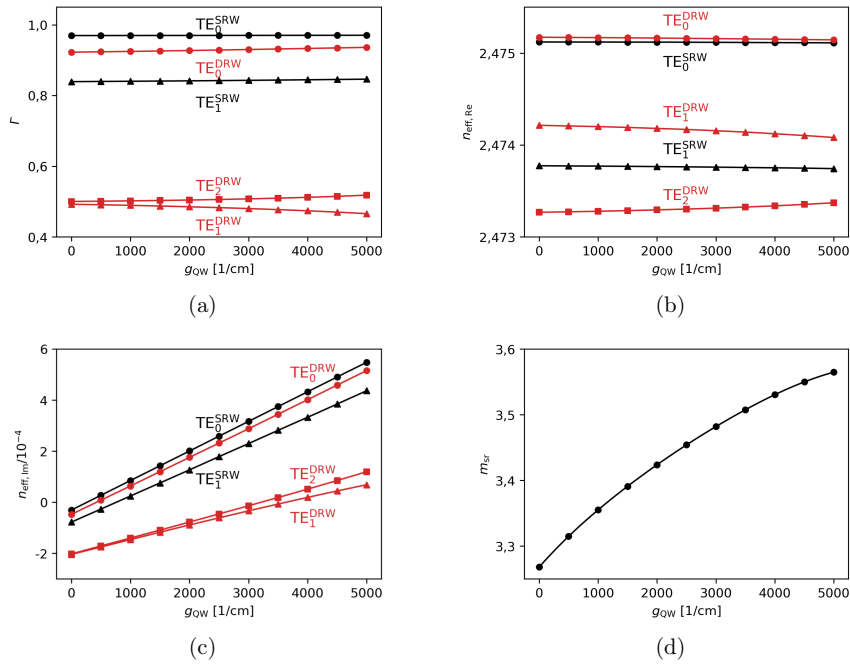
Zależność względnej separacji modów dla struktur DRW z szerokością falowodu A równą  $w_A = 3,5 \mu\text{m}$  od szerokości falowodu B przedstawiono na rysunku 11. Największą wartość,  $m_{\text{sr}} = 3,5$ , uzyskano dla  $w_B = 1,3 \mu\text{m}$ . Rysunek 11 pokazuje również, że  $m_{\text{sr}} > 1$  dla wszystkich rozważanych tu wartości  $w_B$ , co oznacza, że tłumienie modów wyższego rzędu w konfiguracji DRW jest silniejsze niż w strukturze SRW o tej samej szerokości falowodu A. Możliwa jest dalsza optymalizacja struktury DRW pod kątem uzyskania jeszcze wyższych wartości  $m_{\text{sr}}$ , jednak symulacja polegająca na jednoczesnej modyfikacji szerokości obu falowodów wymaga znacznie większej liczby obliczeń i nie została przeprowadzona w ramach niniejszej pracy.

Wpływ wartości parametrów warstwy czynnej (wzmocnienie i absorpcja), podobnie jak dla struktury SRW, został również zbadany w przypadku struktury DRW. Do obliczeń opisanych w tej części pracy wybrana została struktura z  $w_A = 3,5 \mu\text{m}$  i  $w_B = 1,3 \mu\text{m}$ .

Na rysunku 12a pokazano, że dla wzmocnienia z zakresu od  $0 \text{ cm}^{-1}$  do  $5000 \text{ cm}^{-1}$  współczynnik ograniczenia modu  $\text{TE}_0^{\text{DRW}}$  wynosi ponad 90 %, podczas gdy dla modów  $\text{TE}_1^{\text{DRW}}$  i  $\text{TE}_2^{\text{DRW}}$  (oznaczenia modów wynikają z rysunku 12b) wynosi on około 50 %. Skutkuje to wyraźnie mniejszymi wartościami części urojonych efektywnego

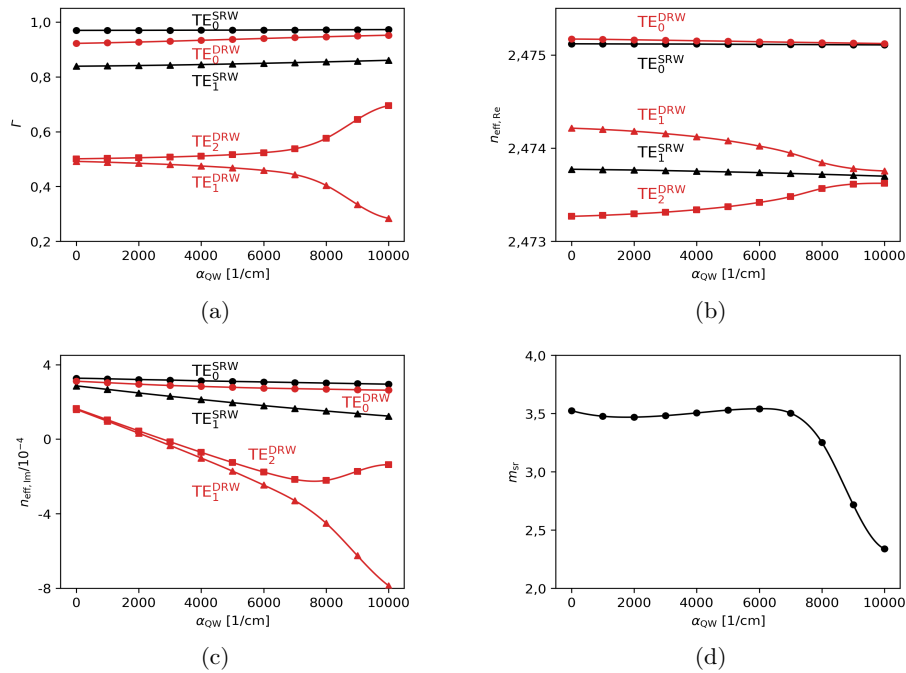


Rysunek 11. Względna separacja modów w zależności od szerokości faliowodu grzbietowego  $B$  w strukturze DRW z faliowodem grzbietowym  $A$  o szerokości  $3,5 \mu\text{m}$ , obliczona dla  $g_{QW} = 3000 \text{ cm}^{-1}$  oraz  $\alpha_{QW} = 3000 \text{ cm}^{-1}$   
*Źródło: opracowanie własne.*



Rysunek 12. Współczynnik ograniczenia modu (a), rzeczywista (b) i urojona (c) część efektywnego współczynnika załamania oraz względna separacja modów (d) w zależności od wzmacnienia przyjętego w warstwach ze studniami kwantowymi w strukturze DRW z faliowodem grzbietowym  $A$  o szerokości  $3,5 \mu\text{m}$  i faliowodem grzbietowym  $B$  o szerokości  $1,3 \mu\text{m}$ , obliczone dla  $\alpha_{QW} = 3000 \text{ cm}^{-1}$   
*Źródło: opracowanie własne.*

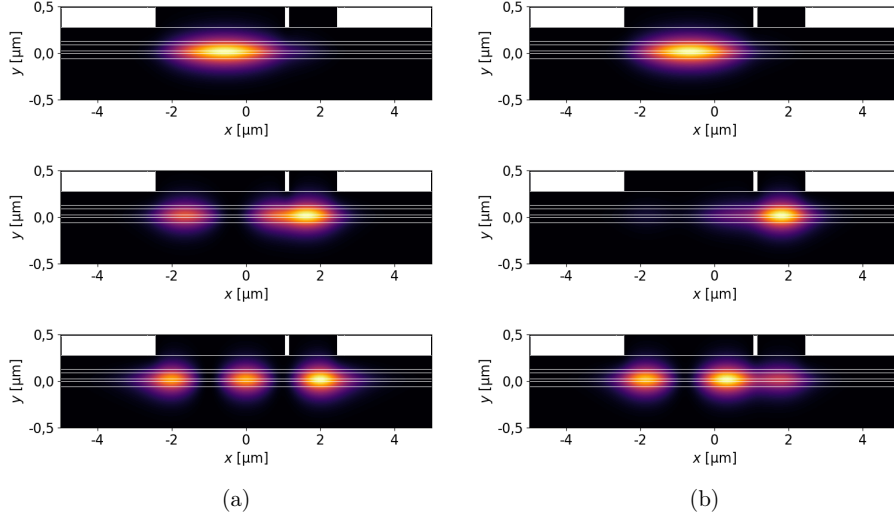
współczynnika załamania dla obu tych modów (rysunek 12c). Wraz ze wzrostem wzmocnienia obserwowane są jedynie niewielkie zmiany współczynnika ograniczenia dla modów  $TE_1^{DRW}$  i  $TE_2^{DRW}$ , co oznacza, że ich przestrzenne rozkłady pozostają zbliżone, a dyskryminacja modów nie ulega wyraźnemu osłabieniu. Separacja modów dla struktury DRW jest wyraźnie większa niż w przypadku struktury SRW o tej samej szerokości falowodu  $A$  (rysunek 12c). Obliczenia wskazują również, że względna separacja modów (rysunek 12d) rośnie wraz ze wzmocnieniem i dla  $g_{QW} = 5000 \text{ cm}^{-1}$  osiąga wartość 3,56.



Rysunek 13. Współczynnik ograniczenia modu (a), rzeczywista (b) i urojona (c) część efektywnego współczynnika załamania oraz względna separacja modów (d) w zależności od absorpcji przyjętej w warstwach ze studniami kwantowymi w strukturze DRW z falowodem grzbietowym A o szerokości  $3,5 \mu\text{m}$  i falowodem grzbietowym B o szerokości  $1,3 \mu\text{m}$ , obliczone dla  $g_{QW} = 3000 \text{ cm}^{-1}$

Źródło: opracowanie własne.

Wpływ drugiego z parametrów opisujących warstwę czynną, absorpcji, na wartość współczynnika ograniczenia modu ukazany jest na rysunku 13a. Dla całego przedziału wartości absorpcji wybranego do obliczeń współczynnik ograniczenia wynosi ponad 90 % dla modu  $TE_0^{DRW}$ , podczas gdy dla modów  $TE_1^{DRW}$  i  $TE_2^{DRW}$  (oznaczenia modów wynikają z rysunku 13b) wynosi około 50 % dla absorpcji od  $0 \text{ cm}^{-1}$  do około  $5000 \text{ cm}^{-1}$ , po czym następują wyraźne zmiany w przestrzennych rozkładach modów



Rysunek 14. Przestrzenne rozkłady modów promieniowania w strukturze DRW z falowodem grzbietowym o szerokości  $3,5 \mu\text{m}$  i falowodem grzbietowym B o szerokości  $1,3 \mu\text{m}$ , obliczone dla  $g_{\text{QW}} = 3000 \text{ cm}^{-1}$  oraz  $\alpha_{\text{QW}} = 0 \text{ cm}^{-1}$  (a) oraz  $g_{\text{QW}} = 3000 \text{ cm}^{-1}$  i  $\alpha_{\text{QW}} = 10000 \text{ cm}^{-1}$  (b)  
Źródło: opracowanie własne.

wyższego rzędu (rysunek 13a) i dochodzi do sytuacji, gdy zamiast rozkładów promieniowania ukazujących sprzężone mody wyższego rzędu (rysunek 14a) obserwuje się takie ich rozkłady, gdzie mody te są prawie całkowicie ograniczone do falowodu A lub falowodu B (rysunek 14b).

Stosując pojęcie znane z literatury poświęconej supersymetrii, można użyć tu pojęcia „złamanie symetrii”. Różnica pomiędzy częściami urojonymi efektywnego współczynnika załamania dla struktury DRW jest większa niż w przypadku struktury SRW o tej samej szerokości falowodu A (rysunek 13c) dla wszystkich rozważanych wartości absorpcji, przy czym dla absorpcji powyżej  $8000 \text{ cm}^{-1}$  separacja modów zaczyna wyraźnie się zmniejszać, co przekłada się na spadek wartości względnej separacji modów (rysunek 13d) z wartości 3,5 (dla  $\alpha_{\text{QW}}$  od  $0 \text{ cm}^{-1}$  do  $7000 \text{ cm}^{-1}$ ) do 2,3 (dla  $\alpha_{\text{QW}} = 10000 \text{ cm}^{-1}$ ).

## 5. PODSUMOWANIE

W niniejszej pracy przedstawiono wyniki symulacji komputerowej azotkowych laserów o emisji krawędziowej, w których zastosowano podejście supersymetryczne. Polega ono na rozszerzeniu typowej struktury z pojedynczym falowodem grzbietowym A o dodatkowy falowód B, pełniący rolę supersymetrycznego partnera falowodu A. Dla takiej konfiguracji przeanalizowano wpływ szerokości falowodu B na tłumienie

modów wyższego rzędu. Dodatkowo zbadano wpływ wzmocnienia i absorpcji w warstwach studni kwantowych na parametry opisujące sprzężenie pomiędzy modami wyższego rzędu.

Uzyskane wyniki wykazały, że zastosowanie struktury z dwoma falowodami o odpowiednio dobranych szerokościach pozwala na silną dyskryminację modów, co umożliwia stabilną pracę w trybie pojedynczego modu poprzecznego nawet w przypadku szerszych obszarów czynnych. Parametr zwany względną separacją modów, użyty do porównania badanych laserów, osiągnął w strukturze DRW wartość około 3,5, co oznacza separację modów ponad trzykrotnie większą niż w strukturze SRW (strukturze referencyjnej z pojedynczym falowodem grzbietowym) o tej samej szerokości. Wynik ten czyni strukturę DRW obiecującym rozwiązaniem w projektowaniu przyrządów przeznaczonych do pracy przy wysokiej mocy optycznej. Co więcej, przeprowadzone obliczenia stanowią punkt wyjścia do dalszych badań nad efektem supersymetrii w strukturach azotkowych, które mogą objąć m.in. analizę wpływu odległości między falowodami, głębokości trawienia czy niejednorodnego rozkładu temperatury w strukturze laserowej, a także wpływu dodania trzeciego falowodu grzbietowego C po przeciwnej stronie niż falowód B.

## LITERATURA

- [1] Mu L., Zhu X., Yang B., Yang L., Xu X., Zhao Y., He D., *Development of a high-power blue diode laser for precision vaporization of prostate tissue for the surgical management of benign prostatic hyperplasia*, "UroPrecision" 2024, vol. 1, no. 3, pp. 105–115.
- [2] Yang J., Zhao D., Liu Z., Huang Y., Wang B., Wang X., Zhang Y., Zhang Z., Liang F., Duan L., Wang H., Shi Y., *GaN based ultraviolet laser diodes*, "Journal of Semiconductors" 2024, vol. 45, no. 1, art. 011501, pp. 1–10.
- [3] Bojarska-Cieślińska A., Marona Ł., Smalc-Koziorowska J., Grzanka S., Weyher J., Schiavon D., Perlin P., *Role of dislocations in nitride laser diodes with different indium content*, "Scientific Reports" 2021, vol. 11, art. 21, pp. 1–8.
- [4] Walker C.L., Bryce A.C., Marsh J.H., *Improved catastrophic optical damage level from laser with nonabsorbing mirrors*, "IEEE Photonics Technology Letters" 2002, vol. 14, no. 10, pp. 1394–1396.
- [5] Redaelli L., Wenzel H., Martens M., Einfeldt S., Kneissl M., Tränkle G., *Index antiquiding in narrow ridge-waveguide (In,Al)GaN-based laser diodes*, "Journal of Applied Physics" 2013, vol. 114, no. 11, art. 113102, pp. 1–9, 2013.
- [6] Huber A.E., Yeoh T.S., Swint R.B., Woo C.Y., Lee K.E., Roh S.D., Coleman J.J., Faircloth B.O., Zediker M.S., *Novel design for high-power single-lateral-mode lasers*, "IEEE Photonics Technology Letters" 2001, vol. 13, no. 10, pp. 1064–1066.

- [7] Sha H., Song Y., Chen Y., Liu J., Shi M., Wu Z., Zhang H., Qin L., Liang L., Jia P., Qiu C., Lei Y., Wang Y., Ning Y., Miao G., Zhang J., Wang L., *Advances in semiconductor lasers based on parity-time symmetry*, "Nanomaterials" 2024, vol. 14, no. 7, art. 571, pp. 1–25.
- [8] Fu T., Wang Y., Zhou X., Du F., Fan J., Wang X., Chen J., Qi A., Zheng W., *Approaches to tuning the exceptional point of PT-symmetric double ridge stripe lasers*, "Optics Express" 2021, vol. 29, no. 13, pp. 20440–20448.
- [9] Miri M.A., Heinrich M., El-Ganainy R., Christodoulides D.N., *Supersymmetric optical structures*, "Physical Review Letters" 2013, vol. 110, no. 23, art. 233902, pp. 1–5.
- [10] Zhao X., Zeng S., Sweatt L., Zhu L., *High-power single-mode triple-ridge waveguide semiconductor laser based on supersymmetry*, "AIP Advances" 2021, vol. 11, no. 9, art. 095216, pp. 1–6, 2021.
- [11] Şeker E., Olyaeefar B., Dadashi K., Şengül S., Teimourpour M.H., El-Ganainy R., Demir A., *Single-mode quasi PT-symmetric laser with high power emission*, "Light: Science & Applications" 2023, vol. 12, art. 149, pp. 1–8.
- [12] Han L., Wang Z., Gordeev N.Y., Maximov M.V., Tang X., Beckman A.A., Kornyshev G.O., Payusov A.S., Shernyakov Y.M., Zhukov A.E., Li K., Zhai R., Jia Z., Yang H., Zhang W., *Progress of edge-emitting diode lasers based on coupled-waveguide concept*, "Micromachines" 2023, vol. 14, no. 6, art. 1271, pp. 1–14.
- [13] Hokmabadi M.P., Nye N.S., El-Ganainy R., Christodoulides D.N., Khajavikhan M., *Supersymmetric laser arrays*, "Science" 2019, vol. 363, no. 6427, pp. 623–626, 2019.
- [14] Dąbrówka D., Sarzała R.P., Wasiak M., Kafar A., Perlin P., Saba K., *Thermal analysis of a two-dimensional array with surface light emission based on nitride EEL lasers*, "Opto-Electronics Review" 2022, vol. 30, no. 4, art. e144115, pp. 1–7.
- [15] Liang F., Zhao D.G., Liu Z.S., Chen P., Yang J., Duan L.H., Shi Y. S., Wang H., *GaN-based blue laser diode with 6.0 W of output power under continuous-wave operation at room temperature*, "Journal of Semiconductors" 2021, vol. 42, no. 11, art. 112801, pp. 1–3.
- [16] Onwukaeme C., Ryu H.Y., *Investigation of the optimum Mg doping concentration in p-type doped layers of InGaN blue laser diode structures*, "Crystals" 2021, vol. 11, no. 11, art. 1335, pp. 1.
- [17] Onwukaeme C., Ryu H.Y., *Optimum design of InGaN blue laser diodes with indium-tin-oxide and dielectric cladding layers*, "Nanomaterials" 2024, vol. 14, no. 17, art. 1409, pp. 1–13.

- [18] Zhang E., Zeng Y., Kang W., Zhong Z., Wang Y., Yan T., Huang S., Zhang Z., Lin K., Kang J., *High-power GaN-based blue laser diodes degradation investigation and anti-aging solution*, "Advanced Photonics Research" 2024, vol. 5, no. 11, art. 2400119, pp. 1–12.
- [19] Uchida S., Takeya M., Ikeda S., Mizuno T., Fujimoto T., Matsumoto O., Goto S., Tojyo T., Ikeda M., *Recent progress in high-power blue-violet lasers*, "IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics" 2003, vol. 9, no. 5, pp. 1252–1259.
- [20] Hou Y., Zhao D., Liang F., Liu Z., Yang J., Chen P., *Enhancing the efficiency of GaN-based laser diodes by the designing of a p-AlGaIn cladding layer and an upper waveguide layer*, "Optical Materials Express" 2021, vol. 11, no. 6, pp. 1780–1790, 2021.
- [21] Dems M., Kotynski R., Panajotov K., *Plane Wave Admittance Method — a novel approach for determining the electromagnetic modes in photonic structures*, "Optics Express" 2005, vol. 13, no. 9, pp. 3196–3207.
- [22] Archambeault B., Ramahi O.M., Drench C., *EMI/EMC Computational Modeling Handbook*, Springer Science+Business Media, Nowy Jork 1998.
- [23] Kudrawiec R., Motyka M., Misiewicz J., Paszkiewicz B., Paszkiewicz R., Tłaczała M., *Contactless electroreflectance study of band gap renormalization for Mg-doped GaN*, "Journal of Physics D: Applied Physics" 2008, vol. 41, no. 16, art. 165109, pp. 1–4.
- [24] Oshima Y., Suzuki T., Eri T., Kawaguchi Y., Watanabe K., Shibata M., Mishima T., *Thermal and optical properties of bulk GaN crystals fabricated through hydride vapor phase epitaxy with void-assisted separation*, "Journal of Applied Physics" 2005, vol. 98, no. 10, art. 103509, pp. 1–4.
- [25] Kuc M., Sarzała R.P., *Modelowanie zjawisk fizycznych w krawędziowych laserach azotkowych oraz ich matrycach*, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 2019.
- [26] Photonics Group, *Python source code fragment for PLaSK (Photonic Lasers Simulation Kit)*, Unpublished code [Computer program], Institute of Physics, Lodz University of Technology, <https://plask.app/> (dostęp: 31.08.2025).
- [27] Kuc M., Sokół A.K., Piskorski Ł., Dems M., Wasiak M., Sarzała R.P., Czyszanowski T., *ITO layer as an optical confinement for nitride edge-emitting lasers*, "Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences" 2020, vol. 68, no. 1, pp. 147–154.
- [28] Zhang X., Chua S.J., Liu W., Chong K.B., *Photorefectance study of Si-doped GaN grown by metal-organic chemical vapor deposition*, "Applied Physics Letters" 1998, vol. 72, no. 15, pp. 1890–1892.

- [29] Varshni Y.P., *Temperature dependence of the energy gap in semiconductors*, "Physica" 1967, vol. 34, no. 1, pp. 149–154.
- [30] Vurgaftman I., Meyer J.R., *Band parameters for nitrogen-containing semiconductors*, "Journal of Applied Physics" 2003, vol. 94, no. 6, pp. 3675–3696.
- [31] Vurgaftman I., Meyer J.R., *Electron Bandstructure Parameters*, [w:] Piprek J. (red.), *Nitride Semiconductor Devices. Principles and Simulation*, Wiley-VCH Verlag GmbH and Co. KGaA, Weinheim 2007, pp. 13–48.
- [32] Malitson I.H., *Interspecimen comparison of the refractive index of fused silica*, "Journal of the Optical Society of America" 1965, vol. 55, no. 10, pp. 1205–1209.
- [33] Rakić A.D., Djurišić A.B., Elazar J.M., Majewski M.L., *Optical properties of metallic films for vertical-cavity optoelectronic devices*, "Applied Optics" 1998, vol. 37, no. 22, pp. 5271–5283.
- [34] Ciddor P.E., *Refractive index of air: new equations for the visible and near infrared*, "Applied Optics" 1996, vol. 35, no. 9, pp. 1566–1573.
- [35] Kuramoto M., Sasaoka C., Futagawa N., Nido M., Yamaguchi A.A., *Reduction of internal loss and threshold current in a laser diode with a ridge by selective re-growth (RiS-LD)*, "Physica Status Solidi" 2002, vol. 192, no. 2, pp. 329–334.
- [36] Ng H.M., Doppalapudi D., Moustakas T.D., Weimann N., Eastman L.F., *The role of dislocation scattering in n-type GaN films*, "Applied Physics Letters" 1998, vol. 73, no. 6, pp. 821–823.
- [37] Eiting C.J., Grudowski P.A., Dupuis R.D., *Growth of low resistivity p-type GaN by metal organic chemical vapour deposition*, "Electronics Letters" 1997, vol. 33, no. 23, pp. 1987–1989.
- [38] Piprek J., *Efficiency models for GaN-based light-emitting diodes: Status and challenges*, "Materials" 2020, vol. 13, no. 22, art. 5174, pp. 1–18.
- [39] Pimputkar S., Suihkonen S., Imade M., Mori Y., Speck J.S., Nakamura S., *Free electron concentration dependent sub-bandgap optical absorption characterization of bulk GaN crystals*, "Journal of Crystal Growth" 2015, vol. 432, pp. 49–53.
- [40] Kucharski R., Janicki Ł., Zajac M., Welna M., Motyka M., Skierbiszewski C., Kudrawiec R., *Transparency of semi-insulating, n-type, and p-type ammonothermal GaN substrates in the near-infrared, mid-infrared, and THz spectral range*, "Crystals" 2017, vol. 7, no. 7, art. 187, pp. 1–10.
- [41] Perlin P., Czystanowski T., Marona Ł., Grzanka S., Kafar A., Stańczyk S., Leszczyński M., Bockowski M., Muziol G., Kuc M., Sarzała R., *Highly doped GaN: A material for plasmonic claddings for blue/green InGaN laser diodes*,

- [w:] Chyi J.I., Nanishi Y., Morkoç H., Piprek J., Yoon E. (red.), *Gallium Nitride Materials and Devices VII, Proceedings of SPIE* 2012, vol. 8262, art. 826216, pp. 1–8.
- [42] Huang C.Y., Lin Y.D., Tyagi A., Chakraborty A., Ohta H., Speck J.S., Den-Baars S.P., Nakamura S., *Optical waveguide simulations for the optimization of InGaN-based green laser diodes*, "Journal of Applied Physics" 2010, vol. 107, no. 2, art. 023101, pp. 1–7.
- [43] Khashan M.A., Nassif A.Y., *Dispersion of the optical constants of quartz and polymethyl methacrylate glasses in a wide spectral range: 0.2–3  $\mu\text{m}$* , "Optics Communications" 2001, vol. 188, no. 1–4, pp. 129–139.
- [44] Xing Z., Li C., Han Y., Hu H., Cheng Z., Wang J., Liu T., *Waveguide-integrated graphene spatial mode filters for on-chip mode-division multiplexing*, "Optics Express" 2019, vol. 27, no. 14, pp. 19188–19195.