Notatki do wykładu

Fizyka ośrodków ciągłych

Fizyka techniczna sem. VI

Spis treści

Wprowadzenie

Pod pojęciem "Fizyki ośrodków ciągłych" w trakcie niniejszego wykładu rozumieć będziemy mechanikę płynów i ciał sprężystych czyli ciał ulegających deformacjom pod wpływem działających sił (w przeciwieństwie do brył sztywnych, w których zakładamy stałość wzajemnych odległości poszczególnych elementów bryły). Podstawowymi założeniami będą:

1. *Ciągły rozkład substancji.* Zaniedbujemy strukturę molekularną - przyjmujemy ciągły rozkład materii i w konsekwencji ciągły rozkład wszystkich wielkości fizycznych.
2. *Stosowalność praw mechaniki klasycznej.* Zakładamy, że do bardzo małych części ciała stosują się prawa klasycznej mechaniki.

Ad. 1. Jak doskonale wiemy, w rzeczywistości materia ma budowę dyskretną, składa się z atomów i cząsteczek (molekuł). Jednak w dużej skali, przykładowo w skali naszego codziennego doświadczenia, z uwagi na ogromną ilość molekuł nawet w niewielkim obszarze, materia jawi się nam jako rozłożona w sposób ciągły. Powietrze w warunkach normalnych (0^oC, 1atm) w 1m^3 zawiera około $2,7 \cdot 10^{25}$ cząsteczek. Oznacza to, że w sześciennej kostce o boku 1μm $= 10^{-6}$m (a zatem w małej skali w warunkach laboratoryjnych) znajduje się około $2,7 \cdot 10^7$ cząsteczek. Średnica cząsteczek wynosi około 10^{-9}m, zaś średnie odległości międzycząsteczkowe $\sim 10^{-8}$m.

W skali około 10^{-8}m wyniki pomiarów różnych wielkości ulegałyby gwałtownym fluktuacjom

`Rysunek` Wyniki pomiarów np. gestości w zależności od skali odległości.

Jeżeli rozpatrujemy obszary makroskopowe, w których ilość molekuł jest duża, pomijamy strukturę molekularną przyjmując ciągły jej rozkład w przestrzeni. Będziemy mówić o gęstości materii w punkcie $x \in \mathbb{R}^3$ i rozumieć przez to stosunek masy m, zawartej w "dostatecznie małym" obszarze przestrzennym wokół punktu x, do objętości tego obszaru

$$\varrho(x) = \frac{m}{V}.$$

Pojęcie "dostatecznie mały" oznacza tak mały, że dalsze jego niezbyt wielkie (np. dwukrotne) zmniejszanie nie wpływa już dostrzegalnie (w granicach błędów doświadczalnych przy danych pomiarach) na wartość stosunku $\frac{m}{V}$. Dla sześcianu $V = L^3$ gdzie *skala nieciągłości* - 10^{-8}m $\ll L \ll \sim 10^{-5}$m - skala ciągłych zmian (np. rozmiary wirów w filiżance kawy).

Ad. 2. Z uwagi na przyjęte założenie pierwsze teoria ośrodków ciągłych nie jest teorią kwantową. A ponieważ prędkości jakie występują w ciałach (np. prędkości dźwięku) jak wynika z doświadczenia są małe w porównaniu z prędkością światła, więc teoria ta nie jest również teorią relatywistyczną. Bedziemy stosować prawa mechaniki klasycznej.

Wykład można traktować jako ilustrację pojęć i twierdzeń matematycznych poznanych na kursie analizy i algebry. Rozpoczniemy od przypomnienia niektórych z nich w rozdziałach pierwszym i drugim. Nie jest to jednak tylko ćwiczenie. Wiele modeli matematycznych ma znaczenie praktyczne

— prawo Archumedesa,
— straty siły (energii) w zwężających się (rozszerzających) rurach
— siła nośna,
— siła oporu Stokesa,
— dynamika fal pływowych (tsunami), prędkość propagacji
— ...

Dynamika ośrodków ciągłych oobejmuje wiele praktycznych problemów, których nie omówimy w trakcie zajęć:

— przepływy w przemyśle: projektowanie pojazdów aerodynamicznych, turbiny elektrowni wodnych, procesy chemiczne,
— ciecze w środowisku naturalnym: przepływy wewnątrz i na zewnątrz budynków, prądy morskie i oceaniczne, prognozowanie pogody i zmian klimatycznych, utrata powłoki ozonowej, erupcje wulkanów
— pływy w geofizyce i astrofizyce: wypływ magmy, ruch kontynentów, pulsacje gwiazd
— ...

Rozdział 1

Przypomnienie z algebry

1.1. Przestrzenie wektorowe (liniowe).

Definicja 1.1.1. Niech $V \neq \emptyset$. Uporządkowaną czwórkę $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ nazywamy przestrzenią liniową (wektorową) nad $\mathbb{R}$ jeżeli:

1. $(V, +)$ jest grupą abelową tzn.
   a) $V \neq \emptyset$
   b) $\forall v, w \in V \quad v + w = w + v \in G$ (przemienność)
   c) $\forall v, w, z \in V \quad (v + w) + z = v + (w + z)$ (łączność)
   d) $\exists \Theta \in V \quad \forall v \in V \quad \Theta + v = v$ (wektor zerowy)
   e) $\forall v \in V \quad \exists -v \in V \quad -v + v = \Theta$ (wektor przeciwny)
2. $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ jest działaniem zewnętrznym w V nad $\mathbb{R}$.
3. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall v, w \in V$
   a) $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$,
   b) $a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w$,
   c) $a \cdot (b \cdot v) = (a\, b) \cdot v$,
   d) $1 \cdot v = v$

Uwagi i umowy.

1. Elementy zbioru (ciała) $\mathbb{R}$ nazywamy skalarami.
2. Elementy zbioru V nazywamy *wektorami*, działanie wewnętrzne w grupie $(V, +)$ nazywamy *dodawaniem wektorów*.
3. Element neutralny grupy $(V, +)$ oznaczamy Θ (czytaj *teta*), zaś element odwrotny do $\xi \in V$, "$-\xi$". Zamiast pisać $\xi + (-\eta)$ piszemy krócej $\xi - \eta$.
4. Często zamiast pisać $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ będziemy pisać $V(\mathbb{R})$ lub jeszcze krócej V.

Bardzo ważne przykłady przestrzeni liniowych.

1. Określmy zbiór $V_n(\mathbb{R})$

$$V_n(\mathbb{R}) := \mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n} = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : \quad \forall\ 1 \leqslant i \leqslant n \quad x_i \in \mathbb{R} \} \equiv \{ (x_i)_{i \leqslant n} : \quad \forall\ 1 \leqslant i \leqslant n \quad x_i \in \mathbb{R} \}$$

Określamy działania, dla dowolnych $\xi = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \equiv (x_i)_{i \leqslant n}, \quad \eta = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \equiv (y_i)_{i \leqslant n}, \quad a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \xi + \eta &= (x_i)_{i \leqslant n} + (y_i)_{i \leqslant n} := (x_i + y_i)_{i \leqslant n} \\ a \cdot \xi &= a \cdot (x_i)_{i \leqslant n} := (a\, x_i)_{i \leqslant n} \end{aligned}$$

$V_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową w której $\Theta = (0)_{i\leqslant n} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad -\xi = (-x_i)_{i\leqslant n} \equiv \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$

2. W szczególności $V_1(\mathbb{R})$ jest przestrzenią liniową, ale zbiór $V_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Tutaj $\Theta = 0$.
3. Określmy zbiór $V_\infty(\mathbb{R})$

$$V_\infty(\mathbb{R}) := \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} : \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad x_k \in \mathbb{R}\}$$

Określamy działania, dla dowolnych $\xi = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}, \quad \eta = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}, \quad a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \xi + \eta &= (x_k)_{k\in\mathbb{N}} + (y_k)_{k\in\mathbb{N}} := (x_k + y_k)_{k\in\mathbb{N}} \\ a \cdot \xi &= a \cdot (x_k)_{k\in\mathbb{N}} := (a\, x_k)_{k\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

$V_\infty(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową w której $\Theta = (0)_{k\in\mathbb{N}}, \quad -\xi = (-x_k)_{k\in\mathbb{N}}$

4. Niech $\mathbb{R}[x]_n := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ \exists a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0\}$ jest to zbiór wielomianów stopnia nie większego niż n o współczynnikach z $\mathbb{R}$.
Niech $f, g \in \mathbb{R}[x]_n$ oraz $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Definiujemy

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \wedge \quad (a \cdot f)(x) := a\, f(x)$$

5. Analogicznie przestrzenią liniową jest zbiór wszystkich funkcji ciągłych określonych na pewnej dziedzinie Ω, $C(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} : \ \text{f jest ciągła}\}$, wraz z dodawaniem funkcji i mnożeniem funkcji przez liczbę.

Podstawowe własności przestrzeni liniowej.

1. $a \cdot (\xi_1 + \ldots \xi_N) = a \cdot \xi_1 + \ldots a \cdot \xi_N \quad$ czyli $\quad a \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} \xi_i = \sum\limits_{i=1}^{N} a \cdot \xi_i$.
2. $(a_1 + \ldots a_M) \cdot \xi = a_1\xi + \ldots a_M \cdot \xi \quad$ czyli $\quad (\sum\limits_{i=1}^{M} a_i)\xi = \sum\limits_{i=1}^{M} (a_i \cdot \xi)$.
3. $0 \cdot \xi = \Theta$.
4. $a \cdot \Theta = \Theta$.
5. $(-a) \cdot \xi = a \cdot (-\xi) = -(a \cdot \xi)$.
6. $(a - b) \cdot \xi = a \cdot \xi - b \cdot \xi$.
7. $a \cdot (\xi - \eta) = a \cdot \xi - a \cdot \eta$.

1.2. Kombinacje liniowe. Współrzędne wektora w bazie.

Definicja 1.2.1. Niech $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in V(\mathbb{R})$ oraz $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
Element $a_1\xi_1 + \cdots + a_n\xi_n \in V(\mathbb{R})$ nazywamy *kombinacją liniową* wektorów $\xi_1, \ldots, \xi_n$ o współczynnikach $a_1, \ldots, a_n$.
Zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ oznaczamy $\mathrm{lin}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ (lub inaczej $\mathrm{span}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$) i nazywamy zbiorem generowanym przez wektory lub *rozpiętym* na wektorach $\xi_1, \ldots, \xi_n$

1.3. Odwzorowania liniowe.

1.4. Przestrzeń dualna V^*. Tensory.

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Niech $\dim V = n$. Rozpatrzmy przestrzeń funkcjonałów liniowych nad V. Oznaczmy zbiór tych funkcjonałów przez V^*. Zbiór ten ma naturalną strukturę przestrzeni wektorowej.

Niech $\{e_1, \ldots, e_n\}$ będą bazą przestrzeni V. Zdefiniujmy odwzorowania liniowe

$$\overset{*}{e}{}^{\mu} : V \to R\,, \quad \mu = 1, \ldots, n \tag{1.1}$$

w następujący sposób:

$$\overset{*}{e}{}^{\mu}\,(e_\nu) := \delta^\mu_{\ \nu} \tag{1.2}$$

Oczywiście przestrzeń $\mathrm{span}\{\overset{*}{e}{}^1, \ldots, \overset{*}{e}{}^n\}$ - rozpięta na elementach $\{\overset{*}{e}{}^1, \ldots, \overset{*}{e}{}^n\}$ jest zawarta w V^*.

Lemat 1.4.1. $V^* \subset \mathrm{span}\{\overset{*}{e}{}^1, \ldots, \overset{*}{e}{}^n\}$

Dowód lematu

Dwa odwzorowania liniowe są równe jeśli przyjmują te same wartości na wszystkich wektorach z V. Z liniowości wystarczy sprawdzić równość na wektorach bazowych.

Niech $w \in V^*$. Pokażemy, że da się przedstawić jako kombinacja liniowa $\{\overset{*}{e}{}^1, \ldots, \overset{*}{e}{}^n\}$. Oznaczmy przez w_μ wartości w na wektorze bazowym e_μ tzn. $w_\mu := w(e_\mu)$. Wtedy

$$w(e_\mu) = w_\mu = w_\nu \delta^\nu_{\ \mu} = w_\nu\, \overset{*}{e}{}^{\nu}\,(e_\mu)$$

ponieważ powyższa równość zachodzi dla każdego wektora bazy, więc

$$w = w_\nu\, \overset{*}{e}{}^{\nu}$$

co kończy dowód lematu. ■

Twierdzenie 1.1. $dim V^* = n$.

Dowód. Niech $\{e_1, \ldots, e_n\}$ będą bazą przestrzeni V. Liniowa niezależność układu $\{\overset{*}{e}{}^1, \ldots, \overset{*}{e}{}^n\}$ jest oczywista. Na mocy lematu mamy $V^* \subset \mathrm{span}\{\overset{*}{e}{}^1, \ldots, \overset{*}{e}{}^n\}$. Ponadto $\mathrm{span}\{\overset{*}{e}{}^1, \ldots, \overset{*}{e}{}^n\} \subset V^*$ czyli ostatecznie równość $V^* = \mathrm{span}\{\overset{*}{e}{}^1, \ldots, \overset{*}{e}{}^n\}$. Co kończy dowód twierdzenia. ■

Baza $\{\overset{*}{e}{}^{\mu}\}$ zdefiniowana w dowodzie twierdzenia wzorem (1.2) nosi nazwę bazy dualnej do $\{e_\mu\}$, a sama przestrzeń V^* nazwę przestrzeni dualnej (lub sprzężonej).

Jeżeli przejdziemy do innej bazy $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ w V to elementy nowej bazy możemy wyrazić jako kombinacje liniowe elementów starej bazy i odwrotnie tzn.

$$e'_\mu = e_\nu\, a^\nu_{\ \mu} \quad (\ \Rightarrow\ e_\mu = (a^{-1})^\nu_{\ \mu} e'_\nu\ ) \tag{1.3}$$

Z nową bazą możemy związać nową bazę dualną, w której możemy wyrazić elementy starej

$$\overset{*}{e}{}'^{\mu} = b^\mu_{\ \nu}\ \overset{*}{e}{}^{\nu} \quad (\ \Rightarrow\ \overset{*}{e}{}^{\mu} = (b^{-1})^\mu_{\ \nu}\ \overset{*}{e}{}'^{\nu}\ ). \tag{1.4}$$

Otrzymujemy następujący ciąg równości:

$$\begin{aligned} \delta^\mu_{\ \nu} &= \overset{*}{e}{}'^{\mu}\,(e'_\nu) = b^\mu_{\ \alpha}\ \overset{*}{e}{}^{\alpha}\,(e_\beta\, a^\beta_{\ \nu}) \\ &= b^\mu_{\ \alpha}\, a^\beta_{\ \nu}\ \overset{*}{e}{}^{\alpha}\,(e_\beta) = b^\mu_{\ \alpha}\, a^\beta_{\ \nu}\, \delta^\alpha_{\ \beta} = b^\mu_{\ \alpha}\, a^\alpha_{\ \nu} \end{aligned}$$

stąd zaś

$$\delta^\mu_{\ \nu} = b^\mu_{\ \alpha}\, a^\alpha_{\ \nu} \tag{1.5}$$

czyli w postaci macierzowej $\hat{b} = \hat{a}^{-1}$. Zatem baza dualna transformuje się przy pomocy macierzy odwrotnej.

Możemy teraz powtórzyć powyższą konstrukcję, wychodząc od przestrzeni dualnej. Otrzymamy wtedy przestrzeń dwukrotnie sprzężoną V^{**}. Element $v^{**} \in V^{**}$ jest funkcjonałem liniowym nad V^*. Jednak V^{**} jest izomorficzna z V, bowiem każdemu elementowi $v \in V$ możemy przyporządkować dokładnie jeden funkcjonał liniowy nad V^*, którego wartością na $v^* \in V^*$ będzie po prostu $v^*(v)$. To odwzorowanie musi być surjekcją skoro $\dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$. Zatem dwukrotne sprzężenie nie wnosi nic nowego.

1.4.1. Pojęcie tensora.

Określmy pojęcie tensora o walencji (k, l) nad V.

Definicja 1.4.1. *Tensorem o walencji (k, l)* nad skończenie wymiarową przestrzenią wektorową V ($\dim V = n$) nazywamy odwzorowanie wieloliniowe

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{k} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{l} \to R$$

Wieloliniowe oznacza, że jest liniowe z uwagi na każdą ze zmiennych. Innymi słowy, jeśli ustalimy wszystkie zmienne poza jedną otrzymamy odwzorowanie liniowe.

Zgodnie z tą definicją widzimy, że tensor o walencji (0,1) jest po prostu wektorem dualnym. Zaś tensor o walencji (1, 0) elementem przestrzeni V^{**} ale zgodnie z naszym utożsamieniem po prostu zwykłym wektorem.

Jeżeli na zbiór tensorów odpowiedniej walencji narzucimy reguły dodawania i mnożenia przez liczby to otrzymamy przestrzeń liniową $\mathcal{T}(k,l)$ tensorów o walencji (k,l). Wymiar tej przestrzeni jest równy $\dim \mathcal{T}(k,l) = n^{k+l}$.

1.4.2. Działania algebraiczne na tensorach.

Wprowadzimy dwie ważne operacje na tensorach
Niech $\{e_1, \ldots, e_n\}$ będzie bazą przestrzeni V, zaś $\{\overset{*}{e'^1}, \ldots, \overset{*}{e'^n}\}$ bazą dualną w V^*.

Definicja 1.4.2. *Kontrakcją (zwężeniem)* względem i-tego i j-tego wskaźnika nazywać będziemy odwzorowanie $C : \mathcal{T}(k,l) \to \mathcal{T}(k-1, l-1)$, które tensorowi $T \in \mathcal{T}(k,l)$ przyporządkowuje tensor

$$CT = \sum_{\mu=1}^{n} T(\ldots, \underbrace{\overset{*}{e^\mu}}_{\text{i}}, \ldots; \ldots, \underbrace{e_\mu}_{\text{j}}, \ldots). \tag{1.6}$$

Twierdzenie 1.2. Operacja zwężenia nie zależy od wyboru bazy.

Dowód. Niech $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ będzie inną bazą w V. Wtedy

$$e'_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} e_\nu \, a^\nu{}_\mu$$

Jak pokazaliśmy baza dualna transformuje się przez macierz odwrotną:

$$\overset{*}{e'^\mu} = \sum_{\nu=1}^{n} (a^{-1})^\mu{}_\nu \; \overset{*}{e^\nu}$$

Możemy napisać zatem następujący ciąg równości:

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=1}^{n} T(\dots, \overset{*}{e'^{\mu}}, \dots; \dots, e'_{\mu}, \dots) &= \sum_{\mu=1}^{n} T(\dots, \sum_{\nu=1}^{n} (a^{-1})^{\mu}_{\ \nu}\ \overset{*}{e^{\nu}}, \dots; \dots, \sum_{\sigma=1}^{n} e_{\sigma}\, a^{\sigma}_{\ \mu}, \dots) \\
&= \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{n} (a^{-1})^{\mu}_{\ \nu} a^{\sigma}_{\ \mu} T(\dots, \overset{*}{e^{\nu}}, \dots; \dots, e_{\sigma}, \dots) \\
&= \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{n} \delta^{\sigma}_{\ \nu} T(\dots, \overset{*}{e^{\nu}}, \dots; \dots, e_{\sigma}, \dots) \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} T(\dots, \overset{*}{e^{\nu}}, \dots; \dots, \sum_{\sigma=1}^{n} e_{\sigma}\delta^{\sigma}_{\ \nu}, \dots) \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} T(\dots, \overset{*}{e^{\nu}}, \dots; \dots, e_{\nu}, \dots) \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

Co kończy dowód. ■

Z dowodu widać, że kontrakcja może być zdefiniowana jedynie względem wskaźników mieszanych tzn. jednego wektorowego i jednego dualnego. W przeciwnym bowiem razie definicja zależałaby od wyboru bazy.

Definicja 1.4.3. Mając dany tensor T o walencji (k,l) oraz tensor S o walencji (r,s) możemy zdefiniować nowy tensor o walencji (k+r,l+s) zwany *iloczynem tensorowym* T i S, oznaczany $T \otimes S$. Definiujemy go następująco: weźmy k+r wektorów dualnych $v^1, \dots, v^{k+r} \in V^*$, oraz $l+s$ wektorów $v_1, \dots, v_{l+s} \in V$ wartością tensora $T \otimes S$ na układzie wektorów i kowektorów $v^1, \dots, v^{k+r}, v_1 \dots, v_{l+s}$ jest

$$\begin{aligned}
&T \otimes S(v^1, \dots, v^{k+r}, v_1, \dots, v_{l+s}) := \\
&:= \quad T(v^1, \dots, v^k, v_1, \dots, v_l) \cdot S(v^{k+1}, \dots, v^{k+r}, v_{l+1}, \dots, v_{l+s}) \qquad (1.8)
\end{aligned}$$

Widać stąd, że jednym ze sposobów konstruowania tensorów jest mnożenie tensorowe wektorów i wektorów dualnych. Łatwo pokazać, że jeżeli $\{e_1, \dots, e_n\}$ oraz $\{\overset{*}{e^1}, \dots, \overset{*}{e^n}\}$ są bazami odpowiednio V i V^* to układ:

$$e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_k} \otimes \overset{*}{e^{\nu_1}} \otimes \dots \otimes \overset{*}{e^{\nu_l}}$$

jest bazą przestrzeni $\mathcal{T}(k,l)$. Zatem dowolny tensor T możemy rozpisać w bazie:

$$T = \sum_{\mu_1,\dots,\mu_k=1}^{n} \sum_{\nu_1,\dots,\nu_l=1}^{n} T^{\mu_1\dots\mu_k}{}_{\nu_1\dots\nu_l} e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_k} \otimes \overset{*}{e^{\nu_1}} \otimes \dots \otimes \overset{*}{e^{\nu_l}} \qquad (1.9)$$

gdzie współczynniki rozwinięcia $T^{\mu_1\dots\mu_k}{}_{\nu_1\dots\nu_l}$ są wartościami tensora T na układzie wektorów bazowych.

Istotnie, (skorzystamy z konwencji sumacyjnej po powtarzających się wskaźnikach)

$$\begin{aligned}
&T(\overset{*}{e^{\mu_1}}, \dots, \overset{*}{e^{\mu_k}}; e_{\nu_1}, \dots, e_{\nu_l}) = \\
&= \quad T^{\alpha_1\dots\alpha_k}{}_{\beta_1\dots\beta_l} e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_k} \otimes \overset{*}{e^{\beta_1}} \otimes \dots \otimes \overset{*}{e^{\beta_l}}\ (\overset{*}{e^{\mu_1}}, \dots, \overset{*}{e^{\mu_k}}; e_{\nu_1}, \dots, e_{\nu_l}) \\
&= \quad T^{\alpha_1\dots\alpha_k}{}_{\beta_1\dots\beta_l} \underbrace{e_{\alpha_1}(\overset{*}{e^{\mu_1}})}_{\delta^{\mu_1}_{\alpha_1}} \cdot \dots \cdot \underbrace{e_{\alpha_k}(\overset{*}{e^{\mu_k}})}_{\delta^{\mu_k}_{\alpha_k}} \underbrace{\overset{*}{e^{\beta_1}}\ (e_{\nu_1}}_{\delta^{\beta_1}_{\nu_1}} \underbrace{\overset{*}{e^{\beta_l}}\ (e_{\nu_l}}_{\delta^{\mu_l}_{\alpha_l}} \\
&= \quad T^{\mu_1\dots\mu_k}{}_{\nu_1\dots\nu_l}. \qquad (1.10)
\end{aligned}$$

Z (1.9) wnioskujemy o prawie transformacji współrzędnych tensora przy przejściu od bazy $\{e_1, \ldots, e_n\}$ do $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$.

$$T'^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l} = T^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}{}_{\beta_1 \ldots \beta_l} a^{\mu_1}{}_{\alpha_1} \ldots a^{\mu_k}{}_{\alpha_k} (a^{-1})^{\beta_1}{}_{\nu_1} \ldots (a^{-1})^{\beta_l}{}_{\nu_l} \tag{1.11}$$

Rzeczywiście,

$$\begin{aligned} T &= T^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}{}_{\beta_1 \ldots \beta_l} e_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_k} \otimes \overset{*}{e}{}^{\beta_1} \otimes \cdots \otimes \overset{*}{e}{}^{\beta_l} \\ &= T^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}{}_{\beta_1 \ldots \beta_l} e'_{\mu_1} a^{\mu_1}{}_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes e'_{\mu_k} a^{\mu_k}{}_{\alpha_k} \otimes (a^{-1})^{\beta_1}{}_{\nu_1} \overset{*}{e'}{}^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes (a^{-1})^{\beta_l}{}_{\nu_l} \overset{*}{e'}{}^{\nu_l} \\ &= T^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}{}_{\beta_1 \ldots \beta_l} a^{\mu_1}{}_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot a^{\mu_k}{}_{\alpha_k} \cdot (a^{-1})^{\beta_1}{}_{\nu_1} \cdot \ldots \cdot (a^{-1})^{\beta_l}{}_{\nu} e'_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes e'_{\mu_k} \otimes \overset{*}{e'}{}^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \overset{*}{e'}{}^{\nu_l} \end{aligned}$$

Jeżeli T ma w pewnej bazie współrzędne $T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l}$ zaś S (o walencji (r,s)) w tej samej bazie współrzędne $S^{\sigma_1 \ldots \sigma_r}{}_{\varrho_1 \ldots \varrho_s}$ to iloczyn tensorowy $T \otimes S$ (o walencji (k+r,l+s))

$$(T \otimes S)^{\alpha_1 \ldots \alpha_{k+r}}{}_{\beta_1 \ldots \beta_{l+s}} = T^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}{}_{\beta_1 \ldots \beta_l} S^{\alpha_{k+1} \ldots \alpha_{k+r}}{}_{\beta_{l+1} \ldots \beta_{l+s}} \tag{1.12}$$

Natomiast kontrakcja ma we współrzędnych postać:

$$(CT)^{\mu_1 \ldots \mu_{k-1}}{}_{\nu_1 \ldots \nu_{l-1}} = T^{\mu_1 \ldots \overbrace{\sigma}^{i} \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \underbrace{\sigma}_{j} \ldots \nu_l}. \tag{1.13}$$

1.4.3. Tensor metryczny. Przestrzeń euklidesowa, przestrzeń Minkowskiego

Rozważmy w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ iloczyn skalarny $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ określony wzorem

$$G(u, v) = \sum_{i=1}^{n} u^i v^i.$$

Tak określone odwzorowanie G jest odwzorowaniem
— symetrycznym $G(u, v) = G(v, u)$,
— dwuliniowym $G(a\,u + b\,v, w) = aG(u, w) + bG(v, w)$,
— dodatnio określonym tzn. $G(u, u) \geqslant 0$ (równość zachodzi tylko gdy $u = 0$.)
Odpowiednik iloczynu skalarnego możemy zdefiniować w dowolnej przestrzeni wektorowej V.

Definicja 1.4.4. Niech V będzie przestrzenią wektorową. *Metryką riemannowską* g w V nazywać będziemy tensor o walencji (0,2), który dla dowolnych $X, Y \in V$ spełnia:
1. $g(X, Y) = g(Y, X)$ - symetryczność
2. $g(X, X) \geqslant 0$ równość zachodzi tylko wtedy gdy $X = 0$.

Definicja 1.4.5. Mówimy, że na V jest określona *metryka pseudo-riemannowska* jeżeli g jest tensorem symetrycznym i niezdegenerowanym tzn. $g(X, Y) = 0$ dla każdego $X \in V$ tylko wtedy gdy $Y = 0$.

Ponieważ metryka jest odwzorowaniem $g : V \times V \to \mathbb{R}$, więc biorąc wektor $X \in V$ mamy $g(X, \cdot) : V \to \mathbb{R}$. Zatem $g(X, \cdot) = \overset{*}{X} \in V^*$ jest wektorem kowariantnym (dualnym) (tensorem o walencji (0,1)). Z warunku, że g jest niezdegenerowana wynika, że metryka zadaje izomorfizm przestzeni V i V^*.

Zapis we współrzędnych. Jak wiemy elementy $\overset{*}{e}{}^{\mu} \otimes \overset{*}{e}{}^{\nu}$ stanowią bazę przestrzeni tensorów 2-krotnie kowariantnych $\mathcal{T}(0, 2)$. Zatem g ma w tej bazie przedstawienie:

$$g = g_{\mu\nu} \overset{*}{e}{}^{\mu} \otimes \overset{*}{e}{}^{\nu} \tag{1.14}$$

Jak w przypadku każdego tensora współrzędne w bazie są wartością odwzorowania na odpowiednich elementach bazowych (porównaj wzór (1.10)) $g_{\mu\nu} = g(e_\mu, e_\nu)$. Wtedy symetryczność oznacza, że macierz metryki $g_{\mu\nu}$ jest macierzą symetryczną $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. Warunek aby metryka była niezdegenerowana oznacza żądanie aby macierz była niezdegenerowana czyli $\det(g_{\mu\nu}) \neq 0$. Możemy wtedy znaleźć macierz odwrotną $\overset{*}{g}{}^{\mu\nu}$ z równania $\overset{*}{g}{}^{\mu\nu}\, g_{\nu\sigma} = \delta^\mu{}_\sigma$. Zadajemy wtedy tensor symetryczny, niezdegenerowany 2-krotnie kontrawariantny $\overset{*}{g}$: $V^* \times V^* \to \mathbb{R}$ określony układem równości

$$\left[\overset{*}{g}\,(e^\mu, e^\nu)\right] := [g(e_\mu, e_\nu)]^{-1}$$

Umowa:

— Tensor odwrotny do g tzn. $\overset{*}{g}$ oznaczać będziemy tym samym symbolem czyli

$$g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} = \delta^\mu{}_\nu$$

nie powinno to prowadzić do nieporozumień jako, że każdy z tych tensorów działa w innej przestrzeni.

— analogicznie wektor kowariantny $g(X,\ ) \in T_p^* M$ oznaczać będziemy po prostu przez X. We współrzędnych metryka g służyć nam będzie do podnoszenia i opuszczania wskaźników tzn.

$$X^\nu = g^{\nu\sigma} X_\sigma$$
$$X_\nu = g_{\nu\sigma} X^\sigma$$

Przykłady.

1. Przestrzeń euklidesowa. Rozważmy w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ metrykę riemannowską $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, której postacią w pewnej bazie $(e_1, \ldots, e_n)$ jest

$$g = \delta_{\mu\nu} e^\mu \otimes e^\nu$$

gdzie $e^\mu \in V^*$ $\mu = 1, \ldots, n$ (opuściliśmy symbol $*$ nad wektorem dualnym - o tym, że jest to wektor dualny mówi nam indeks na górze).

— Parę $(\mathbb{R}^n, g)$ gdzie g metryka riemannowska nazywamy *przestrzenią euklidesową*.

— Bazę $(e_1, \ldots, e_n)$ nazywamy *ortonormalną* gdyż dla każdej pary wektorów

$$g(e_\mu, e_\nu) = \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad \mu \neq \nu \ - \ \text{wzajemnie ortogonalne} \\ 1 & \text{gdy} \quad \mu = \nu \ - \ \text{znormalizowane do jedynki} \end{cases}$$

Dla dowolnych wektorów $X, Y \in V$ mamy

$$X = X^\mu e_\mu\,,\ Y = Y^\nu e_\nu$$
$$g(X, Y) = g(X^\mu e_\mu\,,\, Y^\nu e_\nu) = X^\mu Y^\nu g(e_\mu, e_\nu) = X^\mu Y^\nu \delta_{\mu\nu}$$

Ostatni wzór możemy zapisać korzystając z konwencji podnoszenia i opuszczania wskaźników

$$g(X, Y) = \delta_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu \ = \ X_\nu Y^\nu \ = \ X^\mu Y_\mu$$

Zauważmy, że w przestrzeni euklidesowej (w bazie ortonormalnej)

$$\forall X \in V \quad X_1 = X^1, \ldots, X_n = X^n$$

Wektory kontrawariantne i kowariantne mają te same współrzędne.

W wielu podręcznikach gdzie rozważa się tylko przestrzenie euklidesowe i bazy ortonormalne nie rozróżnia się położenia indeksu i w konsekwencji nie rozróżnia się wektorów kowariantnych i kontrawariantnych.

Rozważmy jeszcze macierz przejścia od jednej bazy ortonormalnej do innej bazy ortonormalnej. Spójrzmy na wzory (1.3)

$$e'_\mu = e_\nu a^\nu{}_\mu$$

Jeżeli nowa baza jest też bazą ortonormalną to

$$\begin{aligned} &g(e'_\mu, e'_\nu) = \delta_{\mu\nu} \quad \text{(z drugiej strony)} \\ &g(e'_\mu, e'_\nu) = g(e_\sigma a^\sigma{}_\mu\,, e_\rho a^\rho{}_\nu) = a^\sigma{}_\mu a^\rho{}_\nu g(e_\sigma\,, e_\rho) = a^\sigma{}_\mu a^\rho{}_\nu \delta_{\sigma\rho} \end{aligned}$$

Zatem

$$\delta_{\mu\nu} = a^\sigma{}_\mu\, \delta_{\sigma\rho}\, a^\rho{}_\nu$$

Zapisane w postaci macierzowej:

$$\mathbb{E} = \hat{a}^{\mathbb{T}}\, \mathbb{E}\, \hat{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{a}^{\mathbb{T}}\, \hat{a} = \mathbb{E}$$

2. Przestrzeń Minkowskiego. Rozważmy w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ metrykę pseudo-riemannowską $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, której postacią w pewnej bazie $(e_1, \ldots, e_4)$ jest

$$g = \eta_{\mu\nu} e^\mu \otimes e^\nu \quad \text{gdzie macierz } \eta = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

— Parę $(\mathbb{R}^4, g)$ gdzie g metryka pseudo-riemannowska określona przez (1.15 nazywamy *przestrzenią Minkowskiego*.
— Bazę $(e_1, \ldots, e_n)$ nazywamy *ortogonalną* gdyż dla każdej pary wektorów

$$\text{jeżeli} \quad \mu \neq \nu \quad \Rightarrow \quad g(e_\mu, e_\nu) = 0 \quad \text{(są wzajemnie ortogonalne)}$$

Dla dowolnego wektora $X \in V$ możliwe są przypadki
— $g(X, X) = \eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu > 0$ mówimy wtedy, że wektor jest typu *czasowego*
— $g(X, X) = \eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu = 0$ mówimy wtedy, że wektor jest typu *zerowego* (*świetlnego*)
— $g(X, X) = \eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu < 0$ mówimy wtedy, że wektor jest typu *przestrzennego*
Zauważmy, że w przestrzeni Minkowskiego (w bazie ortogonalnej)

$$\forall X \in V \quad X_1 = -X^1,\ X_2 = -X^2,\ X_3 = -X^3,\ X_4 = +X^4$$

Wektory kontrawariantne i kowariantne mają różne współrzędne.
Rozważmy jeszcze macierz przejścia od jednej bazy ortogonalnej do innej bazy ortogonalnej (`transformacje Lorentza`).

$$e'_\mu = e_\nu \Lambda^\nu{}_\mu$$

Jeżeli nowa baza jest też bazą ortonormalną to

$$\begin{aligned} &g(e'_\mu, e'_\nu) = \ \eta_{\mu\nu} \quad \text{(z drugiej strony)} \\ &g(e'_\mu, e'_\nu) = g(e_\sigma \Lambda^\sigma{}_\mu\,, e_\rho \Lambda^\rho{}_\nu) = \Lambda^\sigma{}_\mu \Lambda^\rho{}_\nu g(e_\sigma\,, e_\rho) = \Lambda^\sigma{}_\mu \Lambda^\rho{}_\nu \eta_{\sigma\rho} \end{aligned}$$

Zatem

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\sigma{}_\mu\, \eta_{\sigma\rho}\, \Lambda^\rho{}_\nu$$

Czyli warunek na transformacje Lorentza zapisany w postaci macierzowej:

$$\Lambda^{\mathbb{T}}\, \eta\, \Lambda = \eta$$

Rozdział 2

Analiza pól

Nasze rozważania rozpoczniemy od przypadku gdy rozpatrywane wielkości takie jak pola skalarne, wektorowe czy tensorowe są stałe w czasie tzn. są funkcjami położenia i ewentualnie pewnych innych parametrów np. współczynników przenikalności dielektrycznej, temperatury itp. ale nie będziemy ich na razie wypisywać w sposób jawny.

Na ogół nie będziemy wyszczególniać założeń o regularności (klasie różniczkowalności, ciągłości na brzegu itd.) danego pola skalarnego, wektorowego lub tensorowego - ale będziemy milcząco zakładać taką ich regularność jaka potrzebna jest do poprawności matematycznej danych rozważań i rachunków.

Potrzebne pojęcia z analizy matematycznej:

1. Pole skalarne. Przyporządkowanie punktom pewnego obszaru $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ wielkości skalarnej $\varphi \in \mathbb{R}$ nazywać będziemy *polem skalarnym* (lub *funkcją skalarną*)

$$\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

Będziemy pisać

$$\varphi(x) \quad \text{gdzie} \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$$

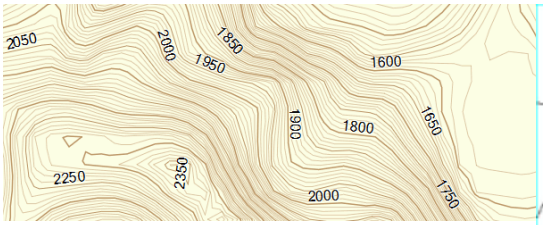
Równanie

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = k = \text{const.} \tag{2.1}$$

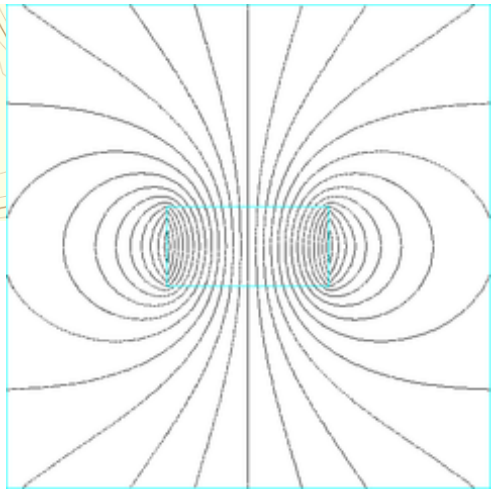
przedstawia powierzchnię, którą nazywamy *ekwiskalarną* lub *powierzchnią stałego φ*.

Jeżeli wartość stałej po prawej stronie równania (2.1) uważać będziemy za parametr zmienny to otrzymamy *jednoparametrową rodzinę powierzchni.*

Rysując kilka powierzchni ekwiskalarnych dla wzrastających o stałą wartość parametrów k (np. $k = 1, 2, 3, \dots$) otrzymamy kilka elementów tej rodziny dających pewne wyobrażenie o polu $\Longrightarrow$ tam gdzie powierzchnie te zbliżają się do siebie, pole skalarne zmienia się szybciej (w kierunku prostopadłym do powierzchni).



Rysunek *Poziomice wysokości npm. $h = h(x_1, x_2)$. W przypadku dwuwymiarowym otrzymujemy rodzinę linii.*



Rysunek **2.1.** *Linie*

2. Pochodna kierunkowa pola skalarnego. Niech $\varphi(x)$ będzie polem skalarnym (funkcją skalarną $\varphi : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. W dowolnym punkcie $x \in \Omega$ i dla dowolnego wektora $\boldsymbol{X}|_x$ zaczepionego w tym punkcie definiujemy $\boldsymbol{X}|_x(\varphi) \equiv \dfrac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{X}}|_x$ pochodną φ w kierunku $\boldsymbol{X}$ w punkcie x następująco:

   obieramy punkt $x' = x + \varepsilon\boldsymbol{X}$ leżący na prostej ℓ przechodzącej przez x i wyznaczonej przez wektor $\boldsymbol{X}$

$$\boldsymbol{X}|_x(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varphi(x') - \varphi(x)}{\varepsilon}$$

   gdzie $\varepsilon > 0$ dla kierunku zgodnego z $\boldsymbol{X}$, $\varepsilon < 0$ dla przeciwnego.

   Oczywiście $\boldsymbol{X}|_x(\varphi)$ jest `skalarem`.

   — Pojęcie pochodnej kierunkowej można sprowadzić do pochodnej zwykłej, mianowicie funkcja φ ograniczona do zadanej prostej ℓ jest funkcją jednej zmiennej np. długości łuku wzdłuż prostej. Wtedy pochodna kierunkowa może być określona jako zwykła pochodna tej funkcji jednej zmiennej.

   — Jeżeli jako wektor wybierzemy *jednostkowy wektor* w kierunku którejkolwiek z osi współrzędnych $\boldsymbol{e}_i$ to pochodna kierunkowa redukuje się do pochodnej cząstkowej

$$\boldsymbol{e}_i|_x(\varphi) = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}|_x$$

3. Pole wektorowe. Przyporządkowanie punktom pewnego obszaru $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ wielkości wektorowej $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ nazywać będziemy *polem wektorowym*

$$\boldsymbol{v} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

   Będziemy pisać

$$\boldsymbol{v}(x) \quad \text{gdzie} \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$$

   Krzywą całkową pola wektorowego nazywamy linię o tej własności, że w w każdym punkcie jest ona styczna do wektora pola w tym punkcie tzn. jeżeli oznaczymy przez $x(\varepsilon)$ parametryczną postać krzywej to równaniem tej krzywej jest

$$\frac{dx}{d\varepsilon} = \lambda\,\boldsymbol{v}|_{x(\varepsilon)} \tag{2.2}$$

   Uwagi

   — Parametr wzdłuż krzywej można dobrać tak aby

$$\frac{dx}{d\varepsilon} = \boldsymbol{v}. \tag{2.3}$$

   Rzeczywiście, niech $\varepsilon = \varepsilon(u) \;\Leftrightarrow\; u = u(\varepsilon)$. Wtedy $\dfrac{dx}{du} = \dfrac{dx}{d\varepsilon}\dfrac{d\varepsilon}{du} = \lambda\,\boldsymbol{v}\,\dfrac{d\varepsilon}{du}$. Jeżeli wybierzemy $\lambda(u)\dfrac{d\varepsilon}{du} = 1$ to otrzymamy $\dfrac{dx}{du} = \boldsymbol{v}$

   — Z teorii równań różniczkowych zwyczajnych wynika istnienie i jednoznaczność rozwiązania (dla każdego zbioru warunków początkowych $x(0) = x_0$) $x(\varepsilon)$ równania (2.3) gdy $\boldsymbol{v}_\mu$ są funkcjami gładkimi. Warunkuje to istnienie *Maksymalnej krzywej całkowej* przechodzącej przez zadany punkt. Określenie maksymalna oznacza, że nie jest ona zawarta w żadnej dłuższej krzywej całkowej tzn. jeżeli $x : I \to \Omega$ jest maksymalną krzywą całkową przechodzącą przez punkt $x_0 = x(0)$, zaś $\tilde{x} : \tilde{I} \to \Omega$ jest inną krzywą całkową przechodzącą przez ten sam punkt punkt $\tilde{x}(0) = x_0$ to $\tilde{I} \subset I$ oraz $\tilde{x}(\varepsilon) = x(\varepsilon)$ dla $\varepsilon \in \tilde{I}$.

2.1. Potok pola wektorowego

Jeżeli $\boldsymbol{v}$ jest polem wektorowym, to oznaczmy przez $x(\varepsilon, a)$ maksymalną krzywą całkową tego pola przechodzącą przez $a = x(0, a) \in \Omega$. Nazwiemy ją (w hydrodynamice gdy pole wektorowe $\boldsymbol{v}$ ma interpretację pola prędkości) *linią prądu* (lub w geometrii *1-parametrową grupą transformacji* lub *potokiem*) *generowanym przez pole* $\boldsymbol{v}$. □
Dla każdego $a \in \Omega$ i ε z pewnego przedziału I_x zawierającego 0, $x(\varepsilon, a)$ jest punktem na krzywej całkowej przechodzącej przez a.
Potok pola wektorowego spełnia następujące warunki:

$$x(\delta, x(\varepsilon, a)) = x(\delta + \varepsilon, a)\,, \quad a \in \Omega \tag{2.4a}$$

dla każdych dwóch $\delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$ takich, że obie strony równania są określone,

$$x(0, a) = a \tag{2.4b}$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} x(\varepsilon, a) = \boldsymbol{v}|_{x(\varepsilon,a)} \tag{2.4c}$$

dla każdego ε dla którego istnieje.
Warunek (2.4c) oznacza, że $\boldsymbol{v}$ jest wektorem stycznym do krzywej $x(\varepsilon, a)$, zaś (2.4b) wyznacza warunki początkowe.
Dowód (2.4a) wynika wprost z twierdzenia o jednoznaczności rozwiązania układu równań różniczkowych zwyczajnych, bowiem obie strony tego równania jako funkcje δ spełniają równanie (2.3) przy tym samym warunku początkowym dla $\delta = 0$.

Wyznaczanie linii prądu (lub 1-parametrowej grupy transformacji) generowanej przez dane pole wektorowe $\boldsymbol{v}$ (innymi słowy znajdowanie rozwiązań układu równań (2.4c)) nazywane jest *eksponencjalizacją* pola wektorowego $\boldsymbol{v}$.
Stosuje się również oznaczenie

$$x(\varepsilon, a) := \exp(\varepsilon \boldsymbol{v}) a.$$

W tej notacji odpowiednie własności potoku mają postać

$$\exp[(\delta + \varepsilon)\boldsymbol{v}]a = \exp(\delta \boldsymbol{v}) \exp(\varepsilon \boldsymbol{v}) a \tag{2.5a}$$

tam gdzie powyższe ma sens,

$$\exp(0\boldsymbol{v})a = a, \tag{2.5b}$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}[\exp(\varepsilon \boldsymbol{v})a] = \boldsymbol{v}|_{\exp(\varepsilon \boldsymbol{v})a} \tag{2.5c}$$

dla każdego $a \in \Omega$.
Te własności usprawiedliwiają notację[1]
Przykłady linii prądu.

[1] Związek z funkcją eksponent jest nawet jeszcze głębszy. Aby się o tym przekonać rozważmy jak gładka funkcja skalarna (pole skalarne) $f : \mathcal{M} \to R$ zmienia się wzdłuż potoku generowanego przez $\boldsymbol{v}$ tzn. rozpatrzmy $f(\exp(\varepsilon \boldsymbol{v})x)$ gdy zmieniamy ε.

$$\frac{d}{d\varepsilon} f(\exp(\varepsilon \boldsymbol{v})x) = v^i(\exp(\varepsilon \boldsymbol{v})x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(\exp(\varepsilon \boldsymbol{v})x) \equiv \boldsymbol{v}(f)[\exp(\varepsilon \boldsymbol{v})x]$$

W szczególności dla $\varepsilon = 0$ mamy

$$\frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} f(\exp(\varepsilon \boldsymbol{v})x) = v^\mu(x) \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(x) \equiv \boldsymbol{v}(f)(x)$$

Z rozwinięcia Taylora mamy

$$f(\exp(\varepsilon \boldsymbol{v})x) = f(x) + \varepsilon \boldsymbol{v}(f)(x) + O(\varepsilon^2).$$

Kontynuując różniczkowanie i podstawiając w szereg Taylora otrzymujemy

$$f(\exp(\varepsilon \boldsymbol{v})x) = f(x) + \varepsilon \boldsymbol{v}(f)(x) + \frac{\varepsilon^2}{2} \boldsymbol{v}^2(f)(x) + ... + \frac{\varepsilon^k}{k!} \boldsymbol{v}^k(f)(x) + O(\varepsilon^{k+1}).$$

a) Rozważmy wzdłuż $\mathbb{R}$ pole wektorowe $\boldsymbol{v} = b\partial_x$ gdzie $b =$ constans. Wtedy

$$\exp(\varepsilon \boldsymbol{v})x = \exp(\varepsilon b \partial_x)x = x + \varepsilon b$$

jako rozwiązanie równania $\dot{x}(\varepsilon) = b$ przy warunku $x(0) = x$.

b) Dla pola wektorowego $\boldsymbol{v} = bx\partial_x$, gdzie $b =$constans mamy

$$\exp(\varepsilon b x \partial_x)x = e^{\varepsilon b}x.$$

jako rozwiązanie równania $\dot{x}(\varepsilon) = bx$ przy warunku $x(0) = x$.

c) W przypadku $\mathbb{R}^n$ stałe pole $\boldsymbol{v} = a^\mu \partial_\mu$, daje

$$\exp(\varepsilon \boldsymbol{v})\vec{x} = \exp(\varepsilon a^\mu \partial_\mu)\vec{x} = \vec{x} + \varepsilon \vec{a}$$

jako rozwiązanie układu równań $\dot{\vec{x}}(\varepsilon) = \vec{a}$ przy warunku $\vec{x}(0) = \vec{x}$.

d) Jeżeli weźmiemy pod uwagę pole wektorowe na $\mathbb{R}^n$ $\boldsymbol{v} = a^i_j x^j \frac{\partial}{\partial x^i}$, gdzie $A = [a^i_j]$ jest macierzą o stałych współczynnikach, otrzymamy

$$\exp(\varepsilon \boldsymbol{v})\vec{x} = e^{\varepsilon A}\vec{x}_0.$$

jako rozwiązanie układu równań $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ przy warunku $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$. Gdzie $e^{\varepsilon A}$ rozumiemy jako szereg potęgowy

$$e^{\varepsilon A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} A^k = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} A^k$$

wtedy

$$\frac{d}{d\varepsilon}(e^{\varepsilon A}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\varepsilon^{k-1}}{k!} A^k = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} A^k.$$

♣ Powyższą konstrukcję możemy odwrócić. Mając daną 1-parametrową grupę dyfeomorfizmów spełniającą (2.4a), (2.4b) $\psi(\varepsilon, x) = (\psi^1, \ldots, \psi^n)$ definiujemy pole wektorowe wzorem (2.4c)

$$\boldsymbol{v}^\mu := \left(\frac{d}{d\varepsilon}\psi^\mu(\varepsilon, x)\right), \quad \mu = 1, ..., n.$$

Przykład. Rozważmy na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ ze współrzędnymi (x^1, x^2) 1-parametrową grupę obrotów. Wtedy $\psi(\varepsilon, x)$ dane jest przez

$$\begin{aligned} \psi^1 &= x^1 \cos\varepsilon + x^2 \sin\varepsilon \\ \psi^2 &= -x^1 \sin\varepsilon + x^2 \cos\varepsilon. \end{aligned}$$

Orbitami działania tejgrupy są współśrodkowe okręgi. Pole wektorów stycznych do orbit wyznaczamy z (2.4c):

$$\boldsymbol{v}^1 = \frac{d\psi^1}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} = x^2, \quad \boldsymbol{v}^2 = \frac{d\psi^2}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} = -x^1.$$

---

gdzie $\boldsymbol{v}^2(f) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}(f))$, $\boldsymbol{v}^3(f) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}^2(f))$, itd.
Jeżeli założymy zbieżność szeregu w ε otrzymamy

$$f(\exp(\varepsilon \boldsymbol{v})x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \boldsymbol{v}^k(f)(x)$$

W szczególności jeśli weźmiemy jako f funkcję x^μ to (przy założeniu zbieżności) otrzymujemy

$$[\exp(\varepsilon \boldsymbol{v})x]^\mu = x^\mu + \varepsilon v^\mu + \frac{\varepsilon^2}{2}\boldsymbol{v}(v^\mu)(x) + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \boldsymbol{v}^k(x^\mu)$$

(Porównaj przykład (d) poniżej.) ♣

2.2. Twierdzenia całkowe.

Poniżej przytoczymy, bez dowodów, użyteczne twierdzenia całkowe. Zakładamy oczywiście (zgodnie z wcześniejszą umową) taką klasę różniczkowalności występujących w twierdzeniach pól skalarnych i wektorowych jaka jest potrzebna do ich prawdziwości. Pole skalarne oznaczymy przez ϕ, pole wektorowe $\boldsymbol{E}$, zaś przez $\boldsymbol{n}$ jednostkowe pole wektorowe normalne do powierzchni Σ. Symbolem ∂V oznaczono brzeg obszaru V, $\oint$ oznacza całkę po powierzchni zamkniętej (bez brzegu), dx jest elementem objętości (we współrzędnych kartezjańskich $dx = dx_1 dx_2 dx_3$) a $d\sigma$ elementem powierzchni.

1.
$$\oint_{\Sigma} 1\, d\sigma = \text{ pole powierzchni } \Sigma \tag{2.6a}$$

2.
$$\oint_{\Sigma} \boldsymbol{n}\, d\sigma = 0 \tag{2.6b}$$

3.
$$\oint_{\Sigma=\partial V} \varphi(x)\boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_V \mathtt{grad}\, \varphi\, dx \tag{2.6c}$$

4. Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego.
$$\oint_{\Sigma=\partial V} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\, ds = \int_V \mathtt{div}\, \boldsymbol{E}\, dV \tag{2.6d}$$

we współrzędnych kartezjańskich $\mathtt{div}\, \boldsymbol{E} = \dfrac{\partial \boldsymbol{E}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \boldsymbol{E}_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \boldsymbol{E}_z}{\partial z}$. Patrz stopka[2] We współrzędnych krzywoliniowych postać dywergencji jest omówiona w następnym paragrafie.

5.
$$\oint_{\Sigma=\partial V} \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n}\, d\sigma = -\int_V \mathtt{rot}\, \boldsymbol{E}\, dx \tag{2.6e}$$

6. Twierdzenie Stokesa.
$$\oint_{\mathcal{C}=\partial S} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \mathtt{rot}\, \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma \tag{2.6f}$$

---

[2] `Szkic dowodu`. Rozważmy sześcian $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ umieszczony w początku układu wsółrzędnych

Oznaczenia ścian:
1 - ściana $z = \Delta z = const.$
2 - ściana $y = 0 = const.$
3 - ściana $x = \Delta x = const.$
4 - ściana $z = 0 = const.$
5 - ściana $y = \Delta y = const.$
6 - ściana $x = 0 = const.$
Zamiast całki mamy sumę

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{6} \boldsymbol{E}_i\cdot\boldsymbol{n}_i \Delta S_i &= \underbrace{\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{n}_1}_{E_{1z}} \underbrace{\Delta S_1}_{\Delta x\Delta y} + \underbrace{\boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{n}_2}_{-E_{2y}} \underbrace{\Delta S_2}_{\Delta x\Delta z} + \underbrace{\boldsymbol{E}_3\cdot\boldsymbol{n}_3}_{E_{3x}} \underbrace{\Delta S_3}_{\Delta y\Delta z} \\
&\quad + \underbrace{\boldsymbol{E}_4\cdot\boldsymbol{n}_4}_{-E_z} \underbrace{\Delta S_4}_{\Delta x\Delta y} + \underbrace{\boldsymbol{E}_5\cdot\boldsymbol{n}_5}_{E_{5y}} \underbrace{\Delta S_5}_{\Delta x\Delta z} + \underbrace{\boldsymbol{E}_6\cdot\boldsymbol{n}_6}_{-E_{6x}} \underbrace{\Delta S_6}_{\Delta y\Delta z} \\
\left(\begin{array}{c}\text{grupujemy}\\ \text{wyrazy}\end{array}\right) &= (E_{1z} - E_{4z})\Delta x\Delta y + (E_{5y} - E_{2y})\Delta x\Delta z + \\
&\quad + (E_{3x} - E_{6x})\Delta y\Delta z \\
&= \left[\frac{\Delta(E_z)}{\Delta z} + \frac{\Delta(E_y)}{\Delta y} + \frac{\Delta(E_x)}{\Delta x}\right] \Delta x\Delta y\Delta z
\end{aligned}$$

■

we współrzędnych kartezjańskich $\texttt{rot}\,\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{bmatrix}$. We współrzędnych krzywoliniowych postać rotacji jest omówiona w następnym paragrafie.

2.3. Funkcje i pola we współrzędnych krzywoliniowych.

Oprócz współrzędnych kartezjańskich ($x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$) i odpowiednio jednostkowych wektorów ($\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{e_3}$) wzdłuż każdego z kierunków, możemy rozważać współrzędne krzywoliniowe, które oznaczymy (u, v, w). Ustalonej wartości parametrów (u, v, w) odpowiada punkt o współrzędnych

$$x = x(u, v, w)\,, \quad y = y(u, v, w)\,, \quad z = z(u, v, w).$$

Jeżeli wyznacznik macierzy transformacji (macierzy Jacobiego)

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}$$

jest różny od zera w jakiś punkcie to w otoczeniu tego punktu możemy wyrazić

$$u = u(x, y, z)\,, \quad v = v(x, y, z)\,, \quad w = w(x, y, z).$$

Przykłady.

— **Układ współrzędnych cylindrycznych.** Oznaczamy $u \equiv r, v \equiv \varphi, w \equiv z$

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r sin\varphi\,, \quad z = z.$$

Jacobian

$$\det \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r \neq 0 \quad \text{wszędzie poza osią } z$$

Transformacja odwrotna

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad \varphi = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,, \quad z = z. \qquad \clubsuit$$

— **Układ współrzędnych sferycznych.** Oznaczamy $u \equiv r, v \equiv \theta, w \equiv \varphi$

$$x = r\sin\theta\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi\,, \quad z = r\cos\theta.$$

Jacobian

$$\det \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{bmatrix} = r^2\sin\theta \neq 0 \quad \text{wszędzie poza osią } z$$

Transformacja odwrotna

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,, \quad \theta = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,, \quad \varphi = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \qquad \clubsuit$$

Gdy ustalimy dwa spośród trzech parametrów (u, v, w) otrzymamy linię (krzywą), którą oznaczymy odpowiednio

$$\begin{array}{lll} - \text{ linia } u & \text{gdy} & v = const,\ w = const \\ - \text{ linia } v & \text{gdy} & u = const,\ w = const \\ - \text{ linia } w & \text{gdy} & u = const,\ v = const \end{array}$$

Gdy linie te przecinają się pod kątem prostym to mówimy, że układ krzywoliniowy jest prostokątny. `W dalszym ciągu będziemy rozważać układy krzywoliniowe prostokątne.`

Oznaczmy przez $(\boldsymbol{e_u}, \boldsymbol{e_v}, \boldsymbol{e_w})$ jednostkowe wektory (pola wektorowe) styczne do lini u, v, w odpowiednio. Czyli

`Rysunek`

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{e_u} \cdot \boldsymbol{e_u} = 1\,, & \boldsymbol{e_v} \cdot \boldsymbol{e_v} = 1\,, & \boldsymbol{e_w} \cdot \boldsymbol{e_w} = 1\,, \\ \boldsymbol{e_u} \cdot \boldsymbol{e_v} = 0\,, & \boldsymbol{e_u} \cdot \boldsymbol{e_w} = 0\,, & \boldsymbol{e_v} \cdot \boldsymbol{e_w} = 0 \end{array}$$

Układ wektorów jednostkowych $(\boldsymbol{e_u}, \boldsymbol{e_v}, \boldsymbol{e_w})$ można zawsze tak dobrać (zamieniając ewentualnie ich kolejność) aby był układem `prawoskrętnym` tzn.

$$\boldsymbol{e_u} \times \boldsymbol{e_v} = \boldsymbol{e_w}\,, \quad \boldsymbol{e_v} \times \boldsymbol{e_w} = \boldsymbol{e_u}\,, \quad \boldsymbol{e_w} \times \boldsymbol{e_u} = \boldsymbol{e_v}\,. \tag{2.7}$$

W konsekwencji iloczyn mieszany czyli objętość sześcianu rozpiętego na $\boldsymbol{e_u}, \boldsymbol{e_v}, \boldsymbol{e_w}$

$$1 = \boldsymbol{e_u} \cdot (\boldsymbol{e_v} \times \boldsymbol{e_w}) = \boldsymbol{e_v} \cdot (\boldsymbol{e_w} \times \boldsymbol{e_u}) = \boldsymbol{e_w} \cdot (\boldsymbol{e_u} \times \boldsymbol{e_v}) =: [\boldsymbol{e_u}, \boldsymbol{e_v}, \boldsymbol{e_w}]$$

Wychodząc od pewnego punktu o wektorze wodzącym $\boldsymbol{r} = (x, y, x)$ zmieniając wartości parametrów (u, v, w) o (du, dv, dw) przesuwamy się o wektor

$$d\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} dv + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} dw \tag{2.8}$$

gdzie wektor $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ jest styczny do linii u a jego długość $\| \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \|$ pomnożona przez du jest przyrostem łuku wzdłuż tej linii

$$ds_1 = \| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \| \, du = U \, du \quad \text{gdzie} \quad U := \| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \| \,. \tag{2.9}$$

Analogicznie wektory $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}, \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}$ są styczne do odpowiednich linii v, w.

Z drugiej strony traktując (u, v, w) jako funkcje współrzędnych

$$u = u(x, y, z)\,, \quad v = v(x, y, z)\,, \quad w = w(x, y, z)$$

Gradienty tych funkcji $\mathtt{grad}\, u \equiv \nabla u$, $\mathtt{grad}\, v \equiv \nabla v$, $\mathtt{grad}\, w \equiv \nabla w$, są styczne do odpowiednich linii i mamy

$$\begin{aligned} du &= \nabla u \cdot d\boldsymbol{r} = \nabla u \cdot (\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} dv + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} dw) = \nabla u \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} du\,, \\ dv &= \nabla v \cdot d\boldsymbol{r} = \nabla v \cdot (\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} dv + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} dw) = \nabla v \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} dv\,, \\ dw &= \nabla w \cdot d\boldsymbol{r} = \nabla u \cdot (\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} dv + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} dw) = \nabla w \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} dw\,. \end{aligned}$$

Stąd

$$\nabla u \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = 1\,, \quad \nabla v \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = 1\,, \quad \nabla w \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} = 1\,. \tag{2.10}$$

Wektory $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}$ jako styczne do odpowiednich linii u, v, w można wyrazić przez wektory jednostkowe $\boldsymbol{e_u}, \boldsymbol{e_v}, \boldsymbol{e_w}$[3]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} &= \| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \| \boldsymbol{e_u} := U \boldsymbol{e_u} \quad \text{gdzie} \quad U = \| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}, \\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= \| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \| \boldsymbol{e_v} := V \boldsymbol{e_v} \quad \text{gdzie} \quad V = \| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}, \\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} &= \| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} \| \boldsymbol{e_w} := W \boldsymbol{e_w} \quad \text{gdzie} \quad W = \| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} \| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2},
\end{aligned}$$

Stąd i z (2.10) otrzymujemy

$$\nabla u = \frac{1}{U} \boldsymbol{e_u}, \quad \nabla v = \frac{1}{V} \boldsymbol{e_v}, \quad \nabla w = \frac{1}{W} \boldsymbol{e_w}. \tag{2.11}$$

Obliczmy jeszcze objętości odpowiednich sześcianów

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}\right] &= UVW \\
[\nabla u, \nabla v, \nabla w] &= \frac{1}{UVW}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Gradient, dywergencja i rotacja we współrzędnych krzywoliniowych

Gradient i operator nabla ∇. Zakładamy, że (u, v, w) są krzywoliniowymi współrzędnymi prostokątnymi. Rozważmy funkcję skalarną $\Phi(u, v, w)$ i jej przyrost

$$\begin{aligned}
d\Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial u} du + \frac{\partial \Phi}{\partial v} dv + \frac{\partial \Phi}{\partial w} dw \quad \{ \text{ zapisujemy w postaci iloczynu skalarnego } \} \\
&= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{1}{U} \boldsymbol{e_u} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{1}{V} \boldsymbol{e_v} + \frac{\partial \Phi}{\partial w} \frac{1}{W} \boldsymbol{e_w}\right) \cdot (\boldsymbol{e_u} U du + \boldsymbol{e_v} V dv + \boldsymbol{e_w} W dw)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Z drugiej strony

$$d\Phi = \nabla \Phi \cdot d\boldsymbol{r} \tag{2.14}$$

Porównując stronami (2.13) z (2.14) i korzystając z (2.8) otrzymujemy postać gradientu funkcji skalarnej Φ we współrzędnych krzywoliniowych

$$\texttt{grad}\, \Phi \equiv \nabla \Phi = \frac{1}{U} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \boldsymbol{e_u} + \frac{1}{V} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \boldsymbol{e_v} + \frac{1}{W} \frac{\partial \Phi}{\partial w} \boldsymbol{e_w} \tag{2.15}$$

Operator ∇ wyrażony przez współrzędne krzywoliniowe prostokątne ma postać

$$\nabla = \boldsymbol{e_u} \frac{1}{U} \frac{\partial}{\partial u} + \boldsymbol{e_v} \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial v} + \boldsymbol{e_w} \frac{1}{W} \frac{\partial}{\partial w}$$

a także na mocy (2.11)

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \nabla u + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \nabla v + \frac{\partial \Phi}{\partial w} \nabla w$$

Dywergencja. Rozważamy pole wektorowe $\boldsymbol{A}(u, v, w)$. We współrzędnych kartezjańskich $\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{e_1} + A_y \boldsymbol{e_2} + A_z \boldsymbol{e_3}$ dywergencja ma niezwykle prostą postać

$$\texttt{div}\, \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

[3] Przyjmujemy oznaczenia takie jak w książce [5].

Aby znaleźć postać dywergencji wektora zapisanego we współrzędnych krzywoliniowych

$$\boldsymbol{A} = A_u \boldsymbol{e_u} + A_v \boldsymbol{e_v} + A_w \boldsymbol{e_w} \tag{2.16}$$

gdzie $A_u = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e_u}$ itd. możemy każdy z wektorów jednostkowych zapisać w bazie $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e_u} &= e_{ux}\boldsymbol{e_1} + e_{uy}\boldsymbol{e_2} + e_{uz}\boldsymbol{e_3} \\ \boldsymbol{e_v} &= e_{vx}\boldsymbol{e_1} + e_{vy}\boldsymbol{e_2} + e_{vz}\boldsymbol{e_3} \\ \boldsymbol{e_w} &= e_{wx}\boldsymbol{e_1} + e_{wy}\boldsymbol{e_2} + e_{wz}\boldsymbol{e_3}. \end{aligned}$$

Następnie podstawić do postaci wektora (2.16) i szukać $\mathtt{div}\,\boldsymbol{A}$ pamiętając, że współczynniki $e_{ux}, e_{uy}, \ldots, e_{wz}$ na ogół nie są stałe.

Wygodniej będzie postąpić nieco inaczej. Zauważmy, że z (2.7) i (2.11) wynika

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e_u} = \quad \boldsymbol{e_v} \times \boldsymbol{e_w} &= VW\,(\nabla v \times \nabla w) \\ \boldsymbol{e_v} = \quad \boldsymbol{e_w} \times \boldsymbol{e_u} &= WU\,(\nabla w \times \nabla u) \\ \boldsymbol{e_w} = \quad \boldsymbol{e_u} \times \boldsymbol{e_v} &= UV\,(\nabla u \times \nabla v) \end{aligned} \tag{2.17}$$

Podstawiając do (2.16) otrzymamy

$$\boldsymbol{A} = A_u\, VW\,(\nabla v \times \nabla w) + A_v\, WU(\nabla w \times \nabla u) + A_w UV\,(\nabla u \times \nabla v) \tag{2.18}$$

Zysk jest taki, że dywergencja każdego z iloczynów wektorowych jest równa zero. Rzeczywiście dla przykładu rozważmy

$$\mathtt{div}\,(\nabla v \times \nabla w) = \nabla \cdot (\nabla v \times \nabla w) = \underbrace{(\nabla \times \nabla v)}_{0} \cdot \nabla w - \underbrace{(\nabla \times \nabla w)}_{0} \cdot \nabla v$$

W związku z tym dla pierwszego składnika (2.18) otrzymujemy

$$\nabla \cdot [A_u\, VW\,(\nabla v \times \nabla w)] = \nabla(A_u\, VW) \cdot (\nabla v \times \nabla w) + A_u\, VW\, \underbrace{\nabla \cdot (\nabla v \times \nabla w)}_{0}$$

Ale wiemy już jak wygląda gradient we współrzędnych krzywoliniowych

$$\nabla(A_u\, VW) = \frac{\partial(A_u\, VW)}{\partial u}\nabla u + \frac{\partial(A_u\, VW)}{\partial v}\nabla v + \frac{\partial(A_u\, VW)}{\partial w}\nabla w$$

Mnożąc to wyrażenie skalarnie przez $(\nabla v \times \nabla w)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \nabla(A_u\, VW) \cdot (\nabla v \times \nabla w) &= \left[\tfrac{\partial(A_u\, VW)}{\partial u}\nabla u + \tfrac{\partial(A_u\, VW)}{\partial v}\nabla v + \tfrac{\partial(A_u\, VW)}{\partial w}\nabla w\right] \cdot (\nabla v \times \nabla w) \\ &= \tfrac{\partial(A_u\, VW)}{\partial u}\,[\nabla u \cdot (\nabla v \times \nabla w)] \quad \{\text{ porównaj (2.12)}\} \\ &= \tfrac{1}{UVW}\,\tfrac{\partial(A_u\, VW)}{\partial u} \end{aligned}$$

Analogicznie możemy policzyć dywergencję pozostałych składników we wzorze (2.18) i ostatecznie

$$\mathtt{div}\,\boldsymbol{A} = \frac{1}{UVW}\left[\frac{\partial(VWA_u)}{\partial u} + \frac{\partial(UWA_v)}{\partial v} + \frac{\partial(UVA_w)}{\partial w}\right] \tag{2.19}$$

Rotacja. W celu znalezienia postaci rotacji we współrzędnych krzywoliniowych w rozwinięciu (2.16) wektora $\boldsymbol{A}$ na składowe wykorzystamy wzór (2.11)

$$\boldsymbol{A} = A_u \boldsymbol{e_u} + A_v \boldsymbol{e_v} + A_w \boldsymbol{e_w} = UA_u\nabla u + VA_v\nabla v + WA_w\nabla w$$

dzięki temu

$$\begin{aligned}
\mathtt{rot}\,\boldsymbol{A} &= \mathtt{rot}\,\{UA_u\nabla u + VA_v\nabla v + WA_w\nabla w\} \\
&= \mathtt{grad}\,(UA_u)\times\nabla u + UA_u\underbrace{\mathtt{rot}(\nabla v)}_{0} + \mathtt{grad}\,(VA_v)\times\nabla v + \\
&\quad + VA_v\underbrace{\mathtt{rot}(\nabla v)}_{0} + \mathtt{grad}\,(WA_w)\times\nabla w + WA_w\underbrace{\mathtt{rot}(\nabla w)}_{0} \\
&= \mathtt{grad}\,(UA_u)\times\nabla u + \mathtt{grad}\,(VA_v)\times\nabla v + \mathtt{grad}\,(WA_w)\times\nabla w
\end{aligned}$$

ale $\mathtt{grad}\,(UA_u) = \frac{\partial(UA_u)}{\partial u}\nabla u + \frac{\partial(UA_u)}{\partial v}\nabla v + \frac{\partial(UA_u)}{\partial w}\nabla w$ zatem wykorzystując ponadto (2.17)

$$\mathtt{grad}\,(UA_u)\times\nabla u = \frac{\partial(UA_u)}{\partial v}\underbrace{(\nabla v\times\nabla u)}_{-\frac{1}{UV}\boldsymbol{e_w}} + \frac{\partial(UA_u)}{\partial w}\underbrace{(\nabla w\times\nabla u)}_{\frac{1}{UW}\boldsymbol{e_v}}$$

czyli

$$\mathtt{grad}\,(UA_u)\times\nabla u = -\frac{1}{UV}\frac{\partial(UA_u)}{\partial v}\boldsymbol{e_w} + \frac{1}{UW}\frac{\partial(UA_u)}{\partial w}\boldsymbol{e_v}$$

Analogicznie

$$\begin{aligned}
\mathtt{grad}\,(VA_v)\times\nabla v &= \frac{1}{UV}\frac{\partial(VA_v)}{\partial u}\boldsymbol{e_w} - \frac{1}{VW}\frac{\partial(VA_v)}{\partial w}\boldsymbol{e_u} \\
\mathtt{grad}\,(WA_w)\times\nabla w &= -\frac{1}{UW}\frac{\partial(WA_w)}{\partial u}\boldsymbol{e_v} + \frac{1}{VW}\frac{\partial(WA_w)}{\partial v}\boldsymbol{e_u}
\end{aligned}$$

Dodając stronami i grupując wyrazy stojące przy tych samych wektorach jednostkowych otrzymujemy ostatecznie

$$\begin{aligned}
\mathtt{rot}\,\boldsymbol{A} &= \frac{1}{VW}\left[\frac{\partial(WA_w)}{\partial v} - \frac{\partial(VA_v)}{\partial w}\right]\boldsymbol{e_u} + \\
&\quad + \frac{1}{UW}\left[\frac{\partial(UA_u)}{\partial w} - \frac{\partial(WA_w)}{\partial u}\right]\boldsymbol{e_v} + \\
&\quad + \frac{1}{UV}\left[\frac{\partial(VA_v)}{\partial u} - \frac{\partial(UA_u)}{\partial v}\right]\boldsymbol{e_w}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Wyrażenie na rotację możemy zapisać w postaci wyznacznika

$$\mathtt{rot}\,\boldsymbol{A} = \frac{1}{UVW}\begin{vmatrix} U\boldsymbol{e_u} & V\boldsymbol{e_v} & W\boldsymbol{e_w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ UA_u & VA_v & WA_w \end{vmatrix}$$

Podsumowanie i przykłady

Podsumowując widzimy, że chcąc znaleźć `grad`, `div` i `rot` we współrzędnych krzywoliniowych

$$x = x(u,v,w)\,,\quad y = y(u,v,w)\,,\quad z = z(u,v,w).$$

fundamentalną rolę pełnią długości wektorów

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{bmatrix},\quad \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}\quad \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial w} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}$$

będących kolumnami macierzy Jacobiego. Długości te wynoszą

$$\begin{aligned}
\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \| &= U = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}, \\
\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \| &= V = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}, \\
\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} \| &= W = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2}.
\end{aligned}$$

I tak otrzymaliśmy

$$\begin{aligned}
\mathtt{grad}\,\Phi &= \frac{1}{U}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\boldsymbol{e_u} + \frac{1}{V}\frac{\partial \Phi}{\partial v}\boldsymbol{e_v} + \frac{1}{W}\frac{\partial \Phi}{\partial w}\boldsymbol{e_w}, \\
\mathtt{div}\,\boldsymbol{A} &= \frac{1}{UVW}\left[\frac{\partial (VWA_u)}{\partial u} + \frac{\partial (UWA_v)}{\partial v} + \frac{\partial (UVA_w)}{\partial w}\right], \\
\mathtt{rot}\,\boldsymbol{A} &= \frac{1}{VW}\left[\frac{\partial (WA_w)}{\partial v} - \frac{\partial (VA_v)}{\partial w}\right]\boldsymbol{e_u} + \frac{1}{UW}\left[\frac{\partial (UA_u)}{\partial w} - \frac{\partial (WA_w)}{\partial u}\right]\boldsymbol{e_v} + \\
&= + \frac{1}{UV}\left[\frac{\partial (VA_v)}{\partial u} - \frac{\partial (UA_u)}{\partial v}\right]\boldsymbol{e_w}.
\end{aligned}$$

Jeżeli do wzoru na $\mathtt{div}\,\boldsymbol{A}$ podstawimy $\boldsymbol{A} = \mathtt{grad}\,\Phi$ otrzymamy wzór na Laplasian pola skalarnego we wspólrzędnych krzywoliniowych $\mathtt{div}[\mathtt{grad}\,\Phi] \equiv \triangle\Phi$

$$\mathtt{div}[\mathtt{grad}\,\Phi] \equiv \triangle\Phi = \frac{1}{UVW}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{VW}{U}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{WU}{V}\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{UV}{W}\frac{\partial \Phi}{\partial w}\right)\right] \tag{2.21}$$

Zastosowanie do współrzędnych cylindrycznych i sferycznych. Najczęściej spotykane i stosowane w wielu zagadnieniach fizyki są współrzędne cylindryczne i sferyczne, które zdefiniowaliśmy na początku tego paragrafu. Są one szczególnie użyteczne przy rozważaniu zagadnień o symetrii osiowej lub odpowiednio sferycznej.
Współrzędne cylindryczne. Zwyczajowo oznaczamy $u \equiv r, v \equiv \varphi, w \equiv z$

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r sin\varphi, \quad z = z.$$

Wtedy

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Stąd

$$\begin{aligned}
U &= \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + 0} = 1, \\
V &= \sqrt{(-r\sin\varphi)^2 + (r\cos\varphi)^2 + 0} = r, \\
W &= \sqrt{0 + 0 + 1} = 1.
\end{aligned}$$

A zatem

$$\mathtt{grad}\,\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\,\boldsymbol{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\,\boldsymbol{e_\varphi} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\,\boldsymbol{e_z}\,, \tag{2.22a}$$

$$\mathtt{div}\,\boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + r\frac{\partial A_z}{\partial z}\right], \tag{2.22b}$$

$$\begin{aligned}\mathtt{rot}\,\boldsymbol{A} &= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial z}\right]\boldsymbol{e_r} + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right]\boldsymbol{e_\varphi} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{e_z}\,,\\ &= \frac{1}{r}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e_r} & r\boldsymbol{e_\varphi} & \boldsymbol{e_z}\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_r & rA_\varphi & A_z\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{2.22c}$$

$$\triangle\Phi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + r\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right] \tag{2.22d}$$

Współrzędne sferyczne. Zwyczajowo oznaczamy $u \equiv r, v \equiv \theta, w \equiv \varphi$

$$x = r\sin\theta\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi\,, \quad z = r\cos\theta.$$

Wtedy

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial r} = \begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\end{bmatrix}, \quad \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta} = \begin{bmatrix}r\cos\theta\cos\varphi\\ r\cos\theta\sin\varphi\\ -r\sin\theta\end{bmatrix} \quad \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\varphi} = \begin{bmatrix}-r\sin\theta\sin\varphi\\ r\sin\theta\cos\varphi\\ 0\end{bmatrix}$$

Stąd

$$\begin{aligned}U &= \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta} = 1,\\ V &= \sqrt{r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta} = r,\\ W &= \sqrt{r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + 0} = r\sin\theta.\end{aligned}$$

A zatem

$$\mathtt{grad}\,\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\,\boldsymbol{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\,\boldsymbol{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\,\boldsymbol{e_\varphi}\,, \tag{2.23a}$$

$$\begin{aligned}\mathtt{div}\,\boldsymbol{A} &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial(r^2\sin\theta A_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial\varphi}\right]\\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\,,\end{aligned} \tag{2.23b}$$

$$\begin{aligned}\mathtt{rot}\,\boldsymbol{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{e_r} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right]\boldsymbol{e_\theta} +\\ &+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{e_\varphi}\,,\end{aligned} \tag{2.23c}$$

$$\triangle\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} \tag{2.23d}$$

Rozdział 3

Zasady hydrodynamiki płynów idealnych

Pod pojęciem *płynu* będziemy rozumieć *ciecz* lub *gaz*.

Ogólne charakterystyczne cechy przepływu:

1. Przepływ *ustalony* (*laminarny*).
   Mówimy, że ruch płynu jest *ustalony* (*laminarny*) jeżeli prędkość w dowolnym punkcie przestrzeni jest stała w czasie tzn.
   $$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$$
   Warunki takie mogą być osiągane przy niskich prędkościach - przykładem jest wolno płynący strumyk.
2. Przepływ *wirowy* lub *bezwirowy*.
   Przepływ jest *bezwirowy* wtedy gdy w żadnym punkcie P element płynu ΔV nie ma względem tego punktu wypadkowej prędkości kątowej. (Wyobraźmy sobie małe kółko z łopatkami zanurzone w płynie. Ruch jest bezwirowy gdy kółko jest unoszone nie obracając się.)
   W'przeciwnym razie ruch jest wirowy.
3. Przepływ *ściśliwy* lub *nieściśliwy*.
   Przepływ jest nieściśliwy gdy gęstość ϱ jest stała, niezależna od x, y, z, t.
   Wtedy matematyczny opis przepływu jest znacznie uproszczony. W praktyce gdy rozważamy przepływ cieczy możemy traktować jako przepływ nieściśliwy. W przypadku ruchu w gazach - jeżeli prędkości są mniejsze od prędkości dźwięku to też możemy traktowć jako ruch nieściśliwy.
4. Przepływ *lepki* lub *nielepki*.
   Lepkość jest w ruchu płynu jest odpowiednikiem tarcia w ruchu ciał stałych. Powoduje pojawienie się sił stycznych między warstwami płynu, poruszającymi się względem siebie.

Dwa sposoby opisu ruchu płynu:

1. `Podejście Lagrange'a` (Joseph Luis Lagrange (1736-1813))
   Dzielimy płyn na nieskończenie małe elementy - cząstki płynu. W chwili t_0 cząstka znajduje się w położeniu (x_0, y_0, z_0). Sledzimy ruch cząstki. W chwili t znajduje się ona w punkcie (x, y, z). Stosując zasady mechaniki należy określić położenie jako funkcje warunków początkowych tzn. wyznaczyć
   $$x(t) = x(x_0, y_0, z_0, t_0, t)\,, \;\; y(t) = y(x_0, y_0, z_0, t_0, t)\,, \;\; z(t) = z(x_0, y_0, z_0, t_0, t).$$
   Zadanie to jest tak ogromne, że niejednokrotnie zbyt trudne do wykonania.
2. `Podejście Eulera` (Leonard Euler (1707-1783))
   Obserwujemy przestrzeń w której porusza się płyn i określamy gęstośc płynu i prędkość przepływu w każdym punkcie przestrzeni i w każdej chwili czasu
   $$\varrho(x, y, z, t)\,, \qquad \vec{v}(x, y, z, t)$$
   W tym podejściu koncentrujemy uwagę na tym co dzieje się w pewnym punkcie przestrzeni w pewnej chwili czasu, a nie na tym co dzieje się z pewną określoną cząstką płynu.

Związek pomiędzy wielkościami w obu sposobach opisu ruchu płynu.

Współrzędne w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oznaczać będziemy $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Niech w chwili t_0 ustalona cząstka płynu (podejście Lagrange'a) znajduje się w położeniu $a = (x10, x_{20}, x_{30})$. W chwili $t > t_0$ cząstka ta znajduje się w położeniu $x = x(a, t_0, t)$

`Rysunek.`

Badając przyrost wektora przesunięcia $x(a, t_0, t + \Delta t) - x(a, t_0, t)$ odniesiony do przyrostu czasu Δt otrzymamy prędkość tej określonej cząstki płynu

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(a, t_0, t + \Delta t) - x(a, t_0, t)}{\Delta t} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_a$$

Opis przepływu: tor cząstki, strumień, smuga

W rozdziale drugim omówiliśmy potok pola wektorowego. Zrobiliśmy to przy założeniu, że pole wektorowe $\boldsymbol{v}$ jest funkcją położenia, nie zależy w sposób jawny od czasu. O takim polu mówimy, że jest stacjonarne (a przepływ nazywamy ustalonym). W stacjonarnym polu prędkości przez każdy punkt $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa tego pola, którą w warunkach laboratoryjnych moglibyśmy zwizualizować umieszczając w tym punkcie, w chwili $t = 0$, źródło barnika. Po upływie czasy $t > 0$ obserwowalibyśmy zabarwioną krzywą - tor cząstek.

W przypadku gdy $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \neq 0$ tzn. $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x, t)$ możemy rozróżnić trzy rodzaje linii pozwalające na wizualizację przepływu:

1. tor cząstki (ang. pathline) - trajektoria cząstki płynu przechodzącej w chwili początkowej przez ustalony punkt $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$.

   Tor jest krzywą $x = \boldsymbol{X}(x_0, t)$ określoną równaniem różniczkowym

   $$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{X}(x_0, t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{X}(x_0, t), t) \quad \text{z warunkiem} \quad \boldsymbol{X}(x_0, t = 0) = x_0$$

   Umieszczając w punkcie x_0 barwnik i wykonując zdjęcie o długim czasie ekspozycji, tor cząstki odpowiada kolorowej krzywej na fotografii.

   `Rysunek` **3.1.** *Zdjęcie świateł samochodowych o długim czasie naświetlania.*
   Źródło: www.photographymad.com/pages/view/photographing-car-light-trails

2. Potok (ang. streamline). Ustalamy chwilę czasu t. W tej chwili mamy pewien rozkład wektora prędkości $\boldsymbol{v}(x) = \boldsymbol{v}(x, t)$ (t-ustalone). Linią strumienia $x = \boldsymbol{X}(\varepsilon; x_0, t)$ przechodzącą przez punkt x_0 nazywamy krzywą całkową tego pola, czyli rozwiązanie równania

   $$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\boldsymbol{X}(\varepsilon; x_0, t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{X}(\varepsilon; x_0, t), t) \quad \text{z warunkiem} \quad \boldsymbol{X}(\varepsilon = 0; x_0, t) = x_0$$

Wykonując zdjęcie o krótkim czasie naświetlania obszaru gęsto zaznaczonego barwnikami, otrzymamy układ odcinków ilustrujących pole prędkości w chwili t $\boldsymbol{v}(x,t)$ (t-ustalone). Rysując na tym zdjęciu krzywą, o początku w punkcie x_0, styczną do wektora pola $\boldsymbol{v}$ otrzymamy potok pola prędkości.
Gdy zmienimy chwilę t linia potoku również na ogół ulegnie zmianie.

`Rysunek` **3.2.** *Zdjęcie świateł samochodowych o krótkim czasie naświetlania.*
Źródło: www.photographymad.com/pages/view/photographing-car-light-trails

3. smuga (ang. streakline) -
`Rysunek.` Smuga dymu z komina
Źródło: internet, autor nieznany

Przykład. Rozważmy dwuwymiarowe pole prędkości $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} yt \\ 1 \end{bmatrix}$

1. Tor cząstki. Szukamy rozwiązania układu

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial t} = Y\,t \\ \dfrac{\partial Y}{\partial t} = 1 \end{cases} \quad \text{przy warunku} \quad \begin{cases} X|_{t=0} = x_0 \\ Y|_{t=0} = y_0 \end{cases}$$

Stąd $Y = y_0 + t$ i w konsekwencji $\dfrac{\partial X}{\partial t} = (y_0 + t)t$ oraz $X = x_0 + \frac{1}{2}y_0t^2 + \frac{1}{3}t^3$. Równanie toru (ruchu) w postaci parametrycznej

$$\begin{cases} X(x_0, y_0, t) = x_0 + \frac{1}{2}y_0t^2 + \frac{1}{3}t^3 \\ Y(x_0, y_0, t) = y_0 + t \end{cases}$$

Eliminując t otrzymamy równanie toru w postaci krzywej $X = X(Y)$

$$X = x_0 + \frac{1}{2}y_0(Y - y_0)^2 + \frac{1}{3}(Y - y_0)^3$$

2. Potok. Szukamy rozwiązania układu

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial \varepsilon} = Y\,t \\ \dfrac{\partial Y}{\partial \varepsilon} = 1 \end{cases} \quad \text{przy warunku} \quad \begin{cases} X|_{\varepsilon=0} = x_0 \\ Y|_{\varepsilon=0} = y_0 \end{cases} \quad t = const.$$

Stąd

$$\begin{cases} Y(\varepsilon; x_0, y_0, t) = y_0 + \varepsilon \\ X(\varepsilon; x_0, y_0, t) = x_0 + y_0t\varepsilon + \frac{1}{2}t\varepsilon^2 \end{cases}$$

Eliminując ε otrzymamy równanie rodziny krzywych $X = X(Y, t)$ parametryzowanych przez t

$$X = x_0 + y_0(Y - y_0)t + \frac{1}{2}t(Y - y_0)^2$$

3. Smuga.

3.1. Równanie ciągłości.

Ruch płynu opisujemy metodą Eulera za pomocą:
- skalarnego pola gęstość płynu $\varrho(x,t)$,
- wektorowego pola prędkości płynu $\boldsymbol{v}(x,t)$,

Rozważmy płyn przepływający przez prostokątną ramkę o powierzchni Δs ustawioną prostopadle do kierunku ruchu cieczy (wektora prędkości). Masa cieczy która przechodzi przez powierzchnię Δs w czasie Δt wynosi

$$\Delta m \;=\; \varrho\,\Delta s\, v\,\Delta t$$

Gdy ramka nie jest prostopadła do prędkości to w tym samym czasie przejdzie mniej płynu

$$\Delta m \;=\; \varrho\,\Delta s\,\cos\alpha\, v\,\Delta t$$

Można to zapisać w postaci wektorowej

$$\Delta m \;=\; \varrho\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\Delta s\,\Delta t$$

gdzie $\boldsymbol{n}$ jest *jednostkowym wektorem normalnym do powierzchni.* Dzieląc stronami przez Δt otrzymujemy

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} \;=\; \varrho\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\Delta s$$

Dla dowolnej powierzchni $\mathcal{S}$ w granicy gdy $\Delta t \to 0$

$$\int_{\mathcal{S}} \varrho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,ds = \frac{dM}{dt}$$

Lewa strona powyższego wzoru nosi nazwę *strumienia pola wektorowego $\varrho\,\boldsymbol{v}$ przez powierzchnię* i opisuje szybkość przepływu masy M przez tę powierzchnię.

Niech teraz powierzchnia $\mathcal{S}$ będzie `zamknięta` tzn. bez brzegu. Wtedy ogranicza ona (jest brzegiem) pewnej objętości V ($S = \partial V$).
— Wybieramy konwencję, w której wektor $\boldsymbol{n}$ wystaje na zewnątrz,
— ale $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} > 0$ gdy kąt pomiędzy $\boldsymbol{v}$ oraz $\boldsymbol{n}$ jest ostry, natomiast $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} > 0$ gdy kąt pomiędzy $\boldsymbol{v}$ oraz $\boldsymbol{n}$ jest rozwarty.
— Przy tej konwencji $\oint_{\mathcal{S}=\partial V} \varrho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma$ jest dodatnie gdy ciecz wypływa z objętości V, a ujemne gdy do niej napływa

Szybkość przyrostu masy w objętości V możemy obserwować na podstawie zmian gęstości wewnątrz, stąd

$$\int_V \frac{\partial\varrho}{\partial t}\,dV = -\oint_{\mathcal{S}=\partial V} \varrho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,ds \tag{3.1}$$

Całkowa postać równania ciągłości pod nieobecność źródeł.

Gdy wewnątrz obecne są źródła lub ścieki to wzrost masy wewnątrz dokonuje się nie tylko poprzez wpływ i wypływ przez powierzchnię ograniczającą $S = \partial V$ ale również przez produkcję masy wewnątrz. Możemy to zapisać w postaci

$$\int_V \frac{\partial\varrho}{\partial t}\,dV = -\oint_{\mathcal{S}=\partial V} \varrho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma + \int_V f\,dV$$

gdzie $f(x,t)$ opisuje gęstość szybkości produkcji masy, gdy $f > 0$, lub wyłapywania w przypadku $f < 0$.

Chcąc określić różniczkową postać równania ciągłości skorzystajmy z twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego
Z twierdzenia Gaussa całkową postać równania ciągłości możemy przepisać teraz jako

$$\int_V \left[\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \mathtt{div}\,(\varrho\boldsymbol{v})\right] dV \;=\; \int_V f\,dV$$

A stąd

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathtt{div}(\varrho\, \boldsymbol{v}) \;=\; f$$

Jest to różniczkowa postać równania ciągłości, prawa strona odpowiada produkcji lub ubytkowi masy.Pod nieobecność źródeł lub ścieków otrzymujemy

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathtt{div}(\varrho\, \boldsymbol{v}) \;=\; 0. \tag{3.2}$$

Równanie to wyraża zasadę zachowania masy. Tego typu równanie $\frac{\partial(\;)}{\partial t} + \mathtt{div}[\;] \;=\; 0$ pojawia się często w fizyce teoretycznej przy opisie wielkości ciągłych - energii, ładunku, pędu, stężenia itd. Jeżeli jakaś wielkość jest zachowana w objętości V - w powyższym sensie (tzn. całkowita ilość wewnątrz V może zmieniać się jedynie na skutek wpływania lub wypływania przez brzeg ∂V) wtedy zawsze różniczkowa postać prawa zachowania jest analogiczna do (3.2) czyli znika czterodywergencja. Wielkość w nawiasie ( ) pod znakiem pochodnej po czasie nazywamy *gęstością* tej wielkości (energii, ładunku, ...) czyli ilością na jednostkę objętości. Odpowiednio wielkość wektorowa w nawiasie [ ] pod znakiem dywergencji jest *gęstością prądu* rozpatrywanej wielkości fizycznej (czyli wektorem, którego kierunek i zwrot opisują kierunek i zwrot przepływu a długość wyznacza ilością przepływającą przez jednostkę powierzchni w jednostce czasu).

Ale $\mathtt{div}(\varrho\, \boldsymbol{v}) \;=\; \boldsymbol{v} \cdot \mathtt{grad}\, \varrho + \varrho \mathtt{div}\, \boldsymbol{v}$. Stąd równanie (3.2) możemy zapisać w równoaważnej postaci

$$\underbrace{\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \mathtt{grad}\, \varrho}\; + \varrho\, \mathtt{div}\, \boldsymbol{v} \;=\; 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{D\varrho}{Dt} \;+\; \varrho\, \mathtt{div}\, \boldsymbol{v} \;=\; 0 \tag{3.3}$$

Ciecz nieściśliwa.

Bardzo często w analizie zjawisk dotyczących cieczy, przyjmuje się założenie, że rozważany płyn jest nieściśliwy. Oznancza to, że dowolna ustalona cząstka płynu ma w trakcie ruchu niezmienną gęstość. Nie oznacza to bynajmniej, że $\dfrac{\partial \varrho}{\partial t} \;=\; 0$, bowiem do ustalonego punktu $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ mogą napływać cząstki nieściśliwego płynu o różnej gęstości. Warunek nieściśliwości jest postaci

$$\frac{D\varrho}{Dt} = 0.$$

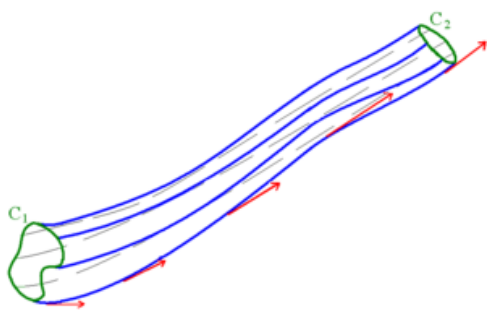
Stąd i z równania ciągłości (3.3) wynika dla cieczy nieściśliwej

$$\mathtt{div}\, \boldsymbol{v} = 0 \tag{3.4}$$

czyli pole prędkości jest solenoidalne.

Często przyjmuje się również mocniejszy warunek $\varrho \;=\; const.$ dla $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}$. Oczywiście wtedy $\dfrac{D\varrho}{Dt} = 0$ jest spełnione w spsób trywialny.

P r z y k ł a d.



`Rysunek` **3.3.** *Wybierając pewną powierzchnię prostopadłą do potoku otrzymamy "rurkowaty" obszar - zwany strugą prądu. Ograniczenia strugi składają się z linii prądu - stycznych do prędkości cząstek (nie przecinających się ze sobą) - w związku z tym* `żaden płyn nie przepływa przez to ograniczenie.` *Struga zachowuje się jak rurka o tym samym co struga kształcie. Płyn, który wchodzi jednym końcem strugi musi wyjść drugim.*

Zakładamy, że ciecz nie jest wyłapywana ani tworzona wewnątrz a przepływ ustalony ($\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = 0$). Oznacza to, że strumień pola wektorowego jest równy zero

$$\oint_{\mathcal{C}} \varrho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, ds = 0$$

Dzielimy na trzy powierzchnie

$$\int_{\mathcal{C}_1} \varrho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, ds + \int_{\mathcal{C}_{\text{boczna}}} \varrho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, ds + \int_{\mathcal{C}_2} \varrho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, ds = 0$$

na powierzchni $\mathcal{C}_1$: $(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})_1 = -v_1$,
na powierzchni $\mathcal{C}_{\text{boczna}}$: $(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})_{\text{boczna}} = 0$,
na powierzchni $\mathcal{C}_2$: $(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})_2 = v_2$.
Przy założeniu, że w każdym punkcie przekroju $\mathcal{C}_1$ prędkość i gęstość ma tę samą wartość to $\int_{\mathcal{C}_1} \varrho(-v_1)\, ds = -\varrho\, v_1 S_1$ gdzie S_1 jest polem powierzchni przekroju poprzecznego. Analogicznie dla $\mathcal{C}_2$. Ostatecznie

$$\varrho_1\, v_1 S_1 = \varrho_2\, v_2 S_2\,.$$

Gdy ciecz jest nieściśliwa tzn. $\varrho_1 = \varrho_2$

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

Z powyższego równania wynika, że dla nieściśliwego przepływu ustalonego `prędkość jest odwrotnie proporcjonalna do pola powierzchni przekroju` i jest większa w węższych częściach strugi.
— strzykawka,
— tłum wychodzący przez małe drzwi.

3.2. Całkowa postać równania ruchu

Siły zewnętrzne (objętościowe). Niech na ośrodek działają zewnętrzne siły (np. grawitacyjne) opisane polem wektorowym

$$\boldsymbol{f}(x) \quad - \quad \text{siłą na jednostkę masy}$$

wymiarem $\boldsymbol{f}(x)$ jest $\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$ (wymiar przyspieszenia).

W punkcie $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ na element objętości dx działa wtedy siła

$$\varrho(x)\, \boldsymbol{f}(x)\, dx$$

Na objętość $V \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$ działa siła

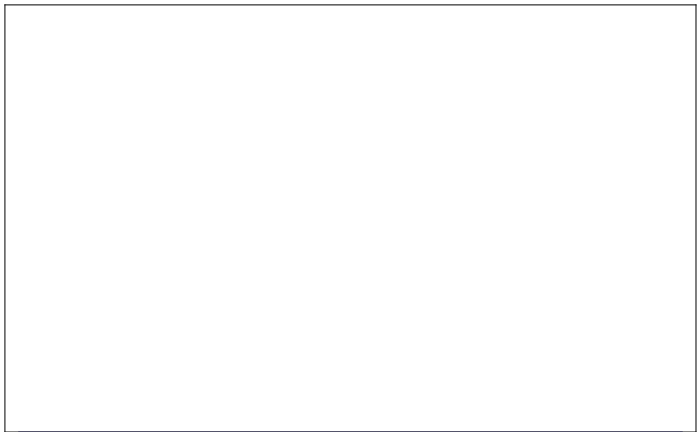
$$\int_V \varrho(x)\, \boldsymbol{f}(x)\, dx$$

Siły powierzchniowe. Doświadczenie uczy nas, że jeżeli tą samą objętość V wydzielimy z ośrodka to na ogół porusza się ona inaczej niż zanurzona w ośrodku. Oznacza to, że otaczający

objętość V ośrodek oddziałuje na nią siłami. Siły te działają przez powierzchnię ∂V ograniczającą objętość V. Nazywać je będziemy *siłami powierzchniowymi.* Przyjmujemy, że w punkcie $x \in \partial V$ siły są proporcjonalne do elementu powierzchni $d\sigma$. Zatem na objętość $V \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$ działa siła powierzchniowa postaci

$$\oint_{\partial V} \boldsymbol{S}(x)\, d\sigma$$

Aby przybliżyć pojęcie sił powierzchniowych rozważmy gaz znajdujący się w dwóch obszarach rozgraniczonych powierzchnią S.



Rysunek **3.4.** *Zjawiska na granicy S w skali molekularnej.*

W skali molekularnej przyjrzyjmy się cząsteczkom przechodzącym z obszaru 1 do 2. Mają one dodatnią składową prędkości w kierunku wektora $\boldsymbol{n}$. Oznacza to przenoszenie pędu w kierunku wektora $\boldsymbol{n}$ z obszaru 1 do 2. Odwrotnie, cząsteczki przechodzą również z obszaru 2 do 1, przenosząc pęd w kierunku -$\boldsymbol{n}$. Uśredniony efekt wypadkowy jest równoważny sile w kierunku $\boldsymbol{n}$ - sile ciśnienia powierzchniowego.

Siły ciśnienia są z definicji *izotropowe* tzn. niezależne od kierunku. Oznacza to, że są opisane przez funkcję skalarną $p(x,t)$ - *ciśnienie.* Siła, w punkcie x, działająca przez powierzchnię $d\sigma$, o wektorze normalnym $\boldsymbol{n}$, wynosi zawsze $p\,\boldsymbol{n}\,d\sigma$ tzn. jest niezależna od wyboru kierunku $\boldsymbol{n}$ (orientacji w przestrzeni elementu powierzchni $d\sigma$). Konwencja znaków jest taka, że $+p\,\boldsymbol{n}\,d\sigma$ jest siłą wywieraną na płyn, do wnętrza którego zwrócony jest wektor $\boldsymbol{n}$, przez płyn z którego skierowany jest $\boldsymbol{n}$. Jeżeli płyn jako całość jest w spoczynku (w spoczynku w skali w której uważamy go za ośrodek ciągły tzn. z wyłączeniem ruchów w skali molekularnej) to ciśnienie jest jedyną siłą powierzchniową.

W poruszającym się płynie istnieją również siły tarcia wewnętrznego (lepkości). Są one również siłami powierzchniowymi. W omawianym przykładzie gazu są one związane z przekazywaniem składowej stycznej pędu (tzn. prostopadłej do $\boldsymbol{n}$) z obszarów 1 do 2 i odwrotnie. Siły tarcia w gazach są na ogół dużo mniejsze niż siły ciśnienia, ponieważ zjawisko przenoszenia pędu raczej się nawzajem znosi niż dodaje. Gdy płyn jest w spoczynku to efekt znoszenia jest całkowity tzn. ilość cząsteczek o pędzie skierowanym w prawo, przechodzących przez powierzchnię S jest, po uśrednieniu równa w obie strony.

Możemy w pierwszym przybliżeniu pominąć lepkość i rozważać tzw. *płyn idealny.* W wielu zagadnieniach jest on wystarczającym przybliżeniem analizowanych zjawisk np. rozchodzeniu się fal na wodzie, opływu unoszących się w wodzie pęcherzyków, czy opływie skrzydeł samolotu.

Opis sił powierzchniowych wymaga wprowadzenia *tensora napięć*, co zrobimy w następnym paragrafie.

Całkowa postać równania ruchu. Pęd płynu zajmującego objętość V (o brzegu $\partial V \equiv S$) wynosi $\int_V \varrho(x)\boldsymbol{v}\,dx$. Jego zmiana odbywa się na skutek:
— działania sił objętościowych,

— działania sił powierzchniowych,
— wpływu (lub wypływu) płynu do objętości obszaru V.
Objętość płynu wypływającego z prędkością $\boldsymbol{v}$ z wnętrza obszaru V przez element $d\sigma$ w czasie δt

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\delta t\,d\sigma$$

[Zgodnie z konwencją, w której wektor $\boldsymbol{n}$ jest skierowany na zewnątrz ciecz wypływa gdy $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}>0$, wpływa zaś gdy $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}<0$.] Pęd unoszony przez ten płyn wynosi $\varrho\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\,\delta t\,d\sigma$. Stąd szybkość unoszenia pędu przez element powierzchni $d\sigma$

$$\varrho\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\,d\sigma$$

Stosując prawa mechaniki klasycznej otrzymujemy

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_V \varrho(x)\boldsymbol{v}\,dx}_{\text{szybkość zmian pędu}} = \tag{3.5}$$

$$= \underbrace{\int_V \varrho(x)\,\boldsymbol{f}(x)\,dx}_{\text{wypadkowa sił objętościowych}} + \underbrace{\oint_{\partial V}\boldsymbol{S}(x)\,d\sigma}_{\text{wypadkowa sił powierzchniowych}} - \underbrace{\oint_{\partial V}\varrho\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\,d\sigma}_{\text{szybkość unoszenia pędu}}$$

Przenosząc ostatni wyraz na lewą stronę i zapisując ównanie dla j-tej składowej otrzymujemy

$$\frac{d}{dt}\int_V \varrho v_j\,dx + \oint_{\partial V}(\varrho v_j\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = \int_V \varrho\,f_j\,dx + \oint_{\partial V} S_j\,d\sigma$$

Po lewej stronie możemy
— wejść z pochodną pod znak całki $\frac{d}{dt}\int_V \varrho v_j\,dx = \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\varrho v_j)\,dx$,
— skorzystać z tw. Gaussa-Ostrogradskiego

$$\oint_{\partial V}(\varrho v_j\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = \int_V \mathtt{div}\,\{\varrho v_j\boldsymbol{v}\}\,dx$$

gdzie $\mathtt{div}\,\{\varrho v_j\boldsymbol{v}\} = \frac{\partial}{\partial x_k}\{\varrho v_j v_k\}$ (suma po k).
Podstawiając możemy oba wyrazy zapisać wspólnie pod znakiem całki

$$\int_V\left[\frac{\partial}{\partial t}(\varrho v_j) + \frac{\partial}{\partial x_k}\{\varrho v_j v_k\}\right]dx$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym możemy przepisać w postaci

$$\varrho\left(\frac{\partial v_j}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\right) + v_j\left(\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\varrho v_k)\right)$$

W pierwszym nawiasie rozpoznajemy $\frac{\partial v_j}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\,\mathtt{grad}\;v_j = \frac{Dv_j}{Dt}$ pochodną substancjalną składowej prędkości. Wyrażenie w drugim nawiasie $\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \mathtt{div}\,(\varrho\boldsymbol{v})$ znika na mocy równania ciągłości. Ostatecznie równanie (3.5) możemy zapisać w postaci

$$\int_V \varrho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\,dx = \int_V \varrho\,\boldsymbol{f}\,dx + \oint_{\partial V}\boldsymbol{S}\,d\sigma \tag{3.6}$$

Równanie (3.5) lub równoważne (3.6) jest całkową postacią równania ruchu (dynamiki). Aby znaleźć jego różniczkową postać należy przeanalizować postać siły powierzchniowej $\boldsymbol{S}(x)$.

3.3. Tensor napięć

W najogólniejszym przypadku powierzchniowa gęstość siły $\boldsymbol{S}$ działająca na element $d\sigma$ może zależeć od kierunku w przestrzeni tego elementu. Oznaczając przez $\boldsymbol{n}$ jednostkowy wektor normalny do powierzchni $d\sigma$ otrzymujemy, że siła $\boldsymbol{S} = S(\boldsymbol{n})$

gdzie S jest pewnym polem tensorowym (o walencji (1,1) przyporządkowującym wektorowi $\boldsymbol{n}$ wektor $\boldsymbol{S}$).

Ustalmy bazę przestrzeni wektorowej $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$.

W tej bazie $\boldsymbol{n} = n_1\boldsymbol{e}_1 + n_2\boldsymbol{e}_2 + n_3\boldsymbol{e}_3$ czyli $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$.

Odpowiednio $S(\boldsymbol{n}) = \begin{bmatrix} S_{n1} \\ S_{n2} \\ S_{n3} \end{bmatrix}$.

W szczególności

$$S(\boldsymbol{e}_k) = \begin{bmatrix} S_{k1} \\ S_{k2} \\ S_{k3} \end{bmatrix} \equiv \boldsymbol{S}_k\,, \quad k = 1, 2, 3.$$

Z własności tensorowych

$$S(\boldsymbol{n}) \;=\; n_1 S(\boldsymbol{e}_1) + n_2 S(\boldsymbol{e}_2) + n_3 S(\boldsymbol{e}_3)$$

Zapisując w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} S_{n1} \\ S_{n2} \\ S_{n3} \end{bmatrix} \;=\; n_1 \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \end{bmatrix} + n_2 \begin{bmatrix} S_{21} \\ S_{22} \\ S_{23} \end{bmatrix} + n_3 \begin{bmatrix} S_{31} \\ S_{32} \\ S_{33} \end{bmatrix}$$

czyli

$$\begin{bmatrix} S_{n1} \\ S_{n2} \\ S_{n3} \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} \\ S_{12} & S_{22} & S_{32} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

Spójrzmy teraz na powyższe wzory jak na iloczyny skalarne.

$$S_{nk} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{S'}_k\,, \quad k = 1, 2, 3.$$

gdzie $\boldsymbol{S'}_k = \begin{bmatrix} S_{1k} \\ S_{2k} \\ S_{3k} \end{bmatrix}$

3.3.1. Symetryczność tensora napięć

Pokażemy teraz, że tensor napięć S jest tensorem symetrycznym (Wystarczy pokazać, że macierz tego tensora jest symetryczna).

Wróćmy do równania ruchu

$$\int_V \varrho(x) \frac{D}{Dt} \boldsymbol{v}\, dx \;=\; \int_V \varrho(x)\, \boldsymbol{f}(x)\, dx \;+\; \oint_{\partial V} S(\boldsymbol{n})\, d\sigma$$

Uzupełnijmy je równaniem na moment pędu

$$\int_V \boldsymbol{r} \times \varrho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\, dx \;=\; \int_V \boldsymbol{r} \times \varrho\, \boldsymbol{f}\, dx \;+\; \oint_{\partial V} \boldsymbol{r} \times S(\boldsymbol{n})\, d\sigma$$

gdzie symbolem $\times$ oznaczono iloczyn wektorowy tzn.

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 f_3 - x_3 f_2 \\ x_3 f_1 - x_1 f_3 \\ x_1 f_2 - x_2 f_1 \end{bmatrix}$$

Warunki równowagi. W przypadku równowagi statycznej ($\frac{d}{dt}\boldsymbol{v} = 0$) mamy

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V \varrho\, \boldsymbol{f}\, dx + \oint_{\partial V} S(\boldsymbol{n})\, d\sigma \\ 0 &= \int_V \boldsymbol{r} \times \varrho\, \boldsymbol{f}\, dx + \oint_{\partial V} \boldsymbol{r} \times S(\boldsymbol{n})\, d\sigma \end{aligned}$$

Dla 1-szej składowej

$$\begin{cases} 0 = \int\limits_V \varrho\, f_1\, dx + \oint\limits_{\partial V} S_{n1}\, d\sigma \\ 0 = \int\limits_V \varrho\, (x_2 f_3 - x_3 f_2)\, dx + \oint\limits_{\partial V} (x_2 S_{n3} - x_3 S_{n2})\, d\sigma \end{cases}$$

W pierwszym równaniu podstawiamy $S_{n1} = \boldsymbol{S'}_1 \cdot \boldsymbol{n}$. Całka po powierzchni przyjmuje postać

$$\oint_{\partial V} S_{n1}\, d\sigma = \oint_{\partial V} \boldsymbol{S'}_1 \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_V \mathtt{div}\,(\boldsymbol{S'}_1)\, dx$$

czyli

$$\varrho\, f_1 + \mathtt{div}\,(\boldsymbol{S'}_1) = 0.$$

Analogicznie dla pozostałych składowych

$$\varrho\, f_2 + \mathtt{div}\,(\boldsymbol{S'}_2) = 0, \quad \varrho\, f_3 + \mathtt{div}\,(\boldsymbol{S'}_3) = 0.$$

W równaniu na momenty sił całka po powierzchni przyjmuje postać

$$\begin{aligned} &\oint_{\partial V} (x_2 S_{n3} - x_3 S_{n2})\, d\sigma \\ &= \oint_{\partial V} (x_2 \boldsymbol{S'}_3 - x_3 \boldsymbol{S'}_2) \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_V \mathtt{div}\,(x_2 \boldsymbol{S'}_3 - x_3 \boldsymbol{S'}_2)\, dx \\ &= \int_V [\mathtt{grad}(x_2) \cdot \boldsymbol{S'}_3 + x_2 \mathtt{div}\,(\boldsymbol{S'}_3) - \mathtt{grad}(x_3) \cdot \boldsymbol{S'}_2 - x_3 \mathtt{div}\,(\boldsymbol{S'}_2)\, dx \\ &= \int_V [S_{32} + x_2 \underbrace{\mathtt{div}\,(\boldsymbol{S'}_3)}_{-\varrho\, f_3} - S_{23} - x_3 \underbrace{\mathtt{div}\,(\boldsymbol{S'}_2)}_{-\varrho\, f_2}\, dx \end{aligned}$$

Po podstawieniu do równania

$$\int_V \varrho\, (x_2 f_3 - x_3 f_2)\, dx + \int_V [S_{32} - x_2 \varrho\, f_3 - S_{23} + x_3 \varrho\, f_2]\, dx = 0$$

Ostatecznie równanie na 1-szą składową momentu sił redukuje się do postaci

$$\int_V [S_{32} - S_{23}]\, dx = 0$$

Stąd i dowolności obszaru V wynika $S_{32} - S_{23} = 0$ Analogicznie rozważając pozostałe składowe otrzymamy, że

$$S_{kl} = S_{lk}$$

czyli macierz tensora napięć jest macierzą symetryczną. Co oznacza, że tensor jest tensorem symetrycznym.

3.3.2. Interpretacja współczynników tensora napięć

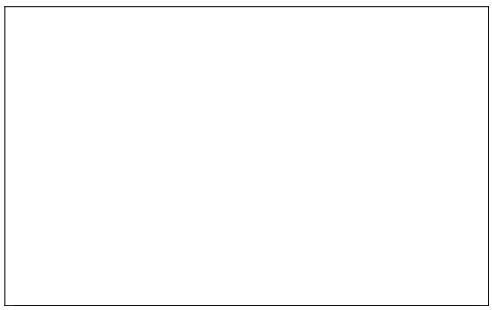
Niech $\boldsymbol{n}$ będzie jednostkowym wektorem normalnym do powierzchni $d\sigma$. Napięcie na tym elemencie wynosi $\boldsymbol{S_n} = \hat{S}(\boldsymbol{n})$
Wektor ten możemy rozłożyć na składowe:
— w kierunku normalnym $\boldsymbol{n}$: $\boldsymbol{S_n} \cdot \boldsymbol{n} = \sigma_n$ - *napięcie normalne* (rozciągające lub ściskające).
— w kierunku stycznym $\boldsymbol{t}$: $\boldsymbol{S_n} \cdot \boldsymbol{t} = \tau_n$ - *napięcie styczne* (tzw. ścinające).
W bazie kartezjańskiej $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ wersorów osi: Ox_1, Ox_2, Ox_3 macierz tensora $\hat{S}$ napięć

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma_y & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z \end{pmatrix}$$

gdzie

$$S_{11} = \boldsymbol{e_1} \cdot \hat{S}(\boldsymbol{e_1}) = \sigma_x\,, \qquad S_{12} = \boldsymbol{e_1} \cdot \hat{S}(\boldsymbol{e_2}) \equiv \boldsymbol{e_2} \cdot \hat{S}(\boldsymbol{e_1}) = \tau_z\,, \qquad S_{13} = \boldsymbol{e_1} \cdot \hat{S}(\boldsymbol{e_3}) \equiv \boldsymbol{e_3} \cdot \hat{S}(\boldsymbol{e_1}) = \tau_y\,,$$
$$S_{22} = \boldsymbol{e_2} \cdot \hat{S}(\boldsymbol{e_2}) = \sigma_y\,, \qquad S_{23} = \boldsymbol{e_2} \cdot \hat{S}(\boldsymbol{e_3}) \equiv \boldsymbol{e_3} \cdot \hat{S}(\boldsymbol{e_2}) = \tau_x\,,$$
$$S_{33} = \boldsymbol{e_3} \cdot \hat{S}(\boldsymbol{e_3}) = \sigma_z\,,$$

Skorzystaliśmy z symetrii tensora napięć $S_{ij} = \boldsymbol{e_i} \cdot \hat{S}(\boldsymbol{e_j}) \equiv \boldsymbol{e_j} \cdot \hat{S}(\boldsymbol{e_i}) = S_{ji}$.



`Rysunek` **3.5.** *Infinitezymalny prostopadłościan o krawędziach rónoległych do osi układu.*

Tensor napięć $\hat{S}$ zależy w ogólności od punktu w przestrzeni

$$\hat{S} = \hat{S}(x_1, x_2, x_3)$$

tworzy zatem *pole tensorowe napięć*. Wszystkie współrzędne (składowe) tensora S_{ij} są więc na ogół funkcjami (x_1, x_2, x_3) (oraz ewentualnie czasu t i innych parametrów).

Jak pokazaliśmy tensor $\hat{S}$ jest symetryczny. Pozwala to *sprowadzić go na osie główne* tzn. wprowadzić w otoczeniu punktu *lokalny* układ współrzędnych prostokątnych o osiach u, v, w (*osiach głównych*), w którym to układzie macierz tego tensora jest diagonalna

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} \sigma_u & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_v & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_w \end{pmatrix}$$

Współrzędne $\sigma_u, \sigma_v, \sigma_w$ nazywamy *napięciami głównymi*.

Zadanie 3.1. Udowodnić następujące

Twierdzenie 3.1. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby tensor posiadał trzy wzajemnie protopadłe kierunki niezmienne (własne) u, v, w jest aby tensor był symetryczny.

3.4. Równanie Eulera. Ciecz idealna.

Znajdziemy teraz różniczkową postać równania ruchu. W cieczach rzeczywistych znajdujących się w ruchu występują napięcia styczne - spowodowane występowaniem *sił tarcia wewnętrznego* między sąsiednimi warstwami cieczy. O czym możemy się przekonać wprawiając naczynie w ruch obrotowy - po pewnym czasie i ciecz w naczyniu wykonuje ruch na skutek przenoszenia pędu pomiędzy wartwami cieczy.

Analizę różniczkowej postaci równania ruchu rozpoczniemy od przypadku *cieczy idealnej*, w której zakładamy znikanie napięć stycznych tzn. w zgodzie z obserwacją Pascala: "...ciśnienie w cieczy rozchodzi się jednakowo we wszystkich kierunkach i jest zawsze skierowane prostopadle do powierzchni granicznych powierzchni."

Dla cieczy idealnej przyjmujemy macierz tensora napięć postaci

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma_y & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -p & 0 & \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

tzn. napięcia główne σ_i są równe $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$ oraz znikają wszystkie napięcia styczne $\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$.

— Zauważmy, że równanie kwadryki:

$$S_{xx}n_x^2 + S_y n_y^2 + S_{zz}n_z^2 + 2S_{xy}n_x n_y + 2S_{xz}n_x n_z + 2S_{yz}n_y n_z \;=\; \text{const.}$$

po podstawieniu postaci tensora (3.7) otrzymujemy

$$-pn_x^2 - pn_y^2 - pn_z^2 \;=\; \text{const.} \quad \Longrightarrow \quad n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 \;=\; \text{const.}$$

równanie kuli. Skoro tak to każdy układ wzajemnie prostopadłych kierunków stanowi układ osi głównych i w każdym układzie tensor przyjmuje postać (3.7). ■

Wynikiem tensora $\hat{S}$ na dowolnym wektorze $\boldsymbol{n}$ normalnym do powierzchni jest $\hat{S}(\boldsymbol{n}) = -p\boldsymbol{n}$ czyli napięcie jest zawsze skierowane prostopadle do powierzchni.

Możemy teraz znaleźć różniczkową postać równania ruchu. Wyjdźmy od równania całkowego (3.6) podstawiając w miejsce wektora $\boldsymbol{S} = \hat{S}(\boldsymbol{n}) = -p\boldsymbol{n}$

$$\begin{aligned} \int_V \varrho(x)\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\,dx &= \int_V \varrho(x)\,\boldsymbol{f}(x)\,dx + \oint_{\partial V}(-p)\boldsymbol{n}\,d\sigma \\ &= \int_V \varrho(x)\,\boldsymbol{f}(x)\,dx - \oint_{\partial V} p\,d\boldsymbol{\sigma} \\ \{\text{porównaj (2.6c)}\} &= \int_V \varrho(x)\,\boldsymbol{f}(x)\,dx - \int_V \mathtt{grad}\,p\,dx \end{aligned}$$

Z dowolności obszaru V otrzymujemy

$$\varrho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \varrho\boldsymbol{f} - \mathtt{grad}\,p \tag{3.8}$$

Pamiętając, że pochodna substanjalna $\dfrac{D\boldsymbol{v}}{Dt} \equiv \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ oraz dzieląc przez dodatnią gęstość $\varrho(x)$ otrzymujemy ostatecznie równanie ruchu cieczy idealnej zwane *równaniem Eulera*

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f} - \frac{1}{\varrho}\mathtt{grad}\,p \tag{3.9}$$

Zadanie 3.2. `Bilans energetyczny.` Zinterpretować pod kątem energetycznym równanie Eulera. ♠

`Wskazówka.` Rozważmy cząskę płynu o masie δm, tak małą aby wewnątrz niej ciśnienie p móc uważać za stałe i zależne od objętości właściwej $\tau := \frac{1}{\varrho}$. Przez $\mathcal{E}_w$ oznaczmy energię wewnętrzną na jednostkę masy. Weźmy pod uwagę wzrost energii wewnętrznej elementu δm

$$d(\mathcal{E}_w \delta m) = -p dx \qquad (dx \text{ jest elementem objętości}).$$

Dla stałej masy wzrost objętości dx wiąże się ze wzrostem objętości właściwej $dx = \delta m\, d\tau$ czyli

$$d\mathcal{E}_w\, \delta m = -p\delta m\, d\tau \quad \Longrightarrow \quad d\mathcal{E}_w \;=\; -p\, d\tau$$

ale $d\tau = d(\frac{1}{\varrho}) = -\frac{1}{\varrho^2}\, d\varrho$. Zatem $d\mathcal{E}_w = \frac{p}{\varrho^2}\, d\varrho$. Ostatecznie

$$\frac{d\mathcal{E}_w}{d\varrho} \;=\; \frac{p}{\varrho^2}$$

Dla dowolnej objętości energia wewnętrzna płynu

$$E_{wew} = \int_V \varrho \mathcal{E}_w\, dx$$

Szybkość zmian energii wewnętrznej

$$\frac{D}{Dt}\,(E_{wew}) = \frac{D}{Dt}\int_V \mathcal{E}_w \varrho\, dx = \int_V \frac{D}{Dt}\,(\mathcal{E}_w)\, \varrho\, dx \tag{3.10}$$

`Udowodnić ostatnią równość we wzorze` (3.10).

Obliczmy $\dfrac{D\mathcal{E}_w}{Dt} = \dfrac{d\mathcal{E}_w}{d\varrho}\dfrac{D\varrho}{Dt}$. Z równania ciągłości (3.3) możemy podstawić $\dfrac{D\varrho}{Dt} = -\varrho\, \mathtt{div}\, \boldsymbol{v}$

$$\frac{D}{Dt}\,(E_{wew}) = \int_V \varrho \frac{d\mathcal{E}_w}{d\varrho}\frac{D\varrho}{Dt}\, dx = \int_V \varrho \frac{p}{\varrho^2}(-1)\varrho\, \mathtt{div}\, \boldsymbol{v}\, dx = -\int_V p\, \mathtt{div}\, \boldsymbol{v}\, dx \tag{3.11}$$

Przejdźmy do równania Eulera (3.8). Pomnóżmy je skalarnie przez $\boldsymbol{v}$. Otrzymujemy

$$\varrho\, \boldsymbol{v} \cdot \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \varrho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \cdot \mathtt{grad}\, p$$

Lewą stronę możemy przepisać w postaci $\varrho\, \dfrac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\right)$. Zakładając, że siła jest zachowawcza i nie zależy jawnie od czasu to pierwszy składnik po prawej stronie możemy przedstawić jako gradient potencjału $\boldsymbol{f} = -\mathtt{grad}\, U$ gdzie $\dfrac{\partial U}{\partial t} = 0$. W konsekwencji $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} = -\mathtt{grad}\, U \cdot \boldsymbol{v} = -\dfrac{D}{Dt}\,(U)$.

Całkując po porcji poruszającego się płynu o objętości V (współporuszającej się z cieczą) mamy

$$\int_V \varrho\, \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\right)\, dx = -\int_V \varrho \frac{D}{Dt}\,(U)\, dx - \int_V \boldsymbol{v} \cdot \mathtt{grad}\, p\, dx$$

Stąd i tożsamości $\mathtt{div}\,(p\boldsymbol{v}) = p\mathtt{div}\, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\mathtt{grad}\, p$

$$\int_V \varrho\, \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 + U\right)\, dx = -\int_{\Sigma=\partial V} p\boldsymbol{v}\, d\sigma + \int_V p\mathtt{div}\, \boldsymbol{v}\, dx$$

Czyli ostatecznie

$$\frac{D}{Dt}\,(E_{kin} + E_{pot} + E_{wew}) = -\int_{\Sigma=\partial V} p\boldsymbol{v}\, d\sigma$$

`Odpowiedź.` Przyrost całkowitej energii porcji płynu $E_{kin} + E_{pot} + E_{wew}$ na jednostkę czasu równa się mocy ciśnień zewnętrznych. ♠

3.5. Równanie fizyczne płynu

Do opisu zachowania płynu musimy dodać jeszcze zależność gęstości $\varrho(x)$ od ciśnienia $p(x)$. W ogólności związek ten opisuje *termodynamiczne równanie stanu* postaci

$$f(\varrho, p, T) = 0 \tag{3.12}$$

gdzie T oznacza temperaturę. Jest ono określone bądź na mocy doświadczenia bądź teorii termodynamicznej materii. Objęcie hydrodynamiki i termodynamiki jest zagadnieniem trudnym i w ogólności jeszcze nie opracowanym[1]. Dlatego w wielu zagadnieniach będziemy rozpatrywać *równanie fizyczne płynu* postaci

$$f(\varrho, p) = 0, \tag{3.13}$$

które można rozwikłać do postaci

$$\varrho = \varrho(p) \quad \text{lub} \quad p = p(\varrho). \tag{3.14}$$

Fizyczne równanie płynu (3.13) pomija szereg zjawisk termodynamicznych m.in. wydzielania ciepła w trakcie ruchu, wpływu temperatury na zmianę gęstości.

Równanie (3.14) pozwala nam odróżnić ciecze od gazów. Jeżeli dla rozważanego płynu w granicy gdy ciśnienie $p \to 0$ dąży do zera gęstość ϱ również dąży do zera to płyn ten nazywamy gazem. Jeżeli natomiast w granicy $p \to 0$ gęstość $\varrho \to \varrho_0 \neq 0$ to wtedy mówimy o cieczy. Stąd wnioskujemy, że jeżeli w naczyniu znajduje się gaz i objętość tego naczynia rośnie to gaz będzie zawsze wypełniał naczynie, natomiast ciecz dla dostatecznie dużej objętości utworzy *powierzchnię swobodną* (wypełni tylko część naczynia).

Idealizacją (najprostszym przypadkiem) jest ciecz nieściśliwa. Równanie fizyczne (stanu) redukuje się wtedy do postaci (gęstość nie zależy wtedy od ciśnienia)

$$\varrho(p) = const.$$

Dla cieczy mało ściśliwej możemy zastosować przybliżenie liniowe. Wtedy równanie fizyczne przyjmie postać

$$\varrho(p) = \varrho_0(1 + \alpha p).$$

W praktyce wiele zastosowań hydrodynamiki opiera się na założeniu cieczy nieściśliwej.

Dla gazów idealnych równanie stanu (Clapeyrona) możemy zapisać w postaci

$$p = \varrho R T$$

gdzie R uniwersalna stała gazowa.

— W warunkach izotermicznych wynika równanie fizyczne postaci $\dfrac{p}{p_0} = \dfrac{\varrho}{\varrho_0}$.

— W warunkach adiabatycznych zaś $\dfrac{p}{\varrho^\kappa} = const$. Zauważmy, że w tym wypadku T jest proporcjonalne do $\varrho^{\kappa-1}$, czyli element gazu poddany kompresji staje się gorętszy[2]. Skąd pochodzi ten wzrost energii wewnętrznej elementu gazu? Z założenia o adiabatyczności procesu otaczający gaz nie przekazuje ciepła. Siły ciśnienia wykonują pracę ściskając rozpatrywany element i to ona, z pierwszej zasady termodynamiki, jest źródłem wzrostu temperatury.

[1] Przykładem może być zachowanie wody w naczyniu szybko i nierównomiernie ogrzewanym. Powstają tam prądy i wiry spowodowane zmianami gęstości wywoływanymi zmianami temperatury.

[2] Każdy z nas kto pompował kiedykolwiek koło rowerowe może to potwierdzić.

3.6. Opis ruchu cieczy idealnej.

Podsumowując możemy napisać układ równań opisujących ruch cieczy
— równanie Eulera - równanie ruchu

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f} - \frac{1}{\varrho}\mathtt{grad}\, p \tag{3.15a}$$

— równanie ciągłości - wyrażające prawo zachowania masy

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathtt{div}(\varrho\, \vec{v}) \;=\; 0 \tag{3.15b}$$

— równanie fizyczne płynu

$$f(\varrho, p) = 0 \tag{3.15c}$$

Jest to układ pięciu równań skalarnych (bowiem równanie (3.15a) jest układem trzech równań) na pięć niewiadomych funkcji $v_1, v_2, v_3, \varrho, p$. Zauważmy, że równanie Eulera (3.15a) zawiera wyraz $(\boldsymbol{v} \cdot \mathtt{grad})\boldsymbol{v}$ nieliniowy w szukanych prędkościach - co znacznie utrudnia jego rozwiązanie.

Jednoznaczne rozwiązanie tego układu otrzymamy rozpatrując warunki brzegowe na powierzchni ograniczającej (w przypadku obszarów ograniczonych) ewentualnie w nieskończoności (gdy obszar jest nieograniczony) i warunki początkowe. Jeżeli obszar Ω jest ograniczony to na jego brzegu $\partial\Omega$ składowa normalna prędkości jest równa zero - wyraża to fakt iż ciecz nie wypływa przez powierzchnię, zaś składowa styczna dowolna

$$\boldsymbol{v_n}|_{\partial\Omega} = 0\,, \quad \boldsymbol{v_t}|_{\partial\Omega} - \text{dowolne.} \tag{3.16}$$

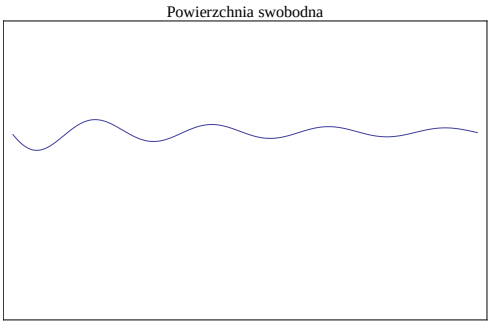
Gdy powierzchnia $\partial\Omega$ porusza się z prędkością $\boldsymbol{u}$ to ruch cieczy musi być zodny z ruchem powierzchni w tym sensie, że składowe normalne do powierzchni muszą być równe

$$\boldsymbol{v_n}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \tag{3.17}$$

Zauważmy, że do wektora $\boldsymbol{u}$ można dodać dowolną składową równoległą $\boldsymbol{u}_{||}$ do $\partial\Omega$. Prawa strona nie ulegnie wtedy zmianie $\boldsymbol{u}_{||} \cdot \boldsymbol{n} = 0$

Powierzchnia swobodna. Poniżej przedstawimy rozważania przydatne przy analizie fal na wodzie.

Niech kształt powierzchni będzie opisany równaniem $x_3 = \xi(x_1, x_2, t)$. Zakładamy, że ξ jest funkcją gładką, opisuje zatem fale, które się nie załamują.



Rysunek **3.6.** *Powierzchnia rozgraniczająca wodę i powietrze. Powierzchnia opisana jest równaniem $x_3 = \xi(x_1, x_2, t)$ lub innymi słowy $\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = x_3 - \xi = 0$*

Aby zastosować na powierzchni warunek (3.17)

$$\boldsymbol{v_n}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}$$

musimy wyrazić zarówno $\boldsymbol{u}$ jak i $\boldsymbol{n}$ poprzez funkcję $\xi(x_1, x_2, t)$.

Przypomnijmy sobie, że na powierzchni $\varphi(\boldsymbol{x}) = const$ gradient jest do niej prostopadły, czyli

$$\boldsymbol{n} = \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}$$

Zatem, skoro $\varphi(\boldsymbol{x}) = x_3 - \xi(x_1, x_2, t)$ to $\nabla\varphi = (-\frac{\partial\xi}{\partial x_1}, -\frac{\partial\xi}{\partial x_2}, 1)$ czyli

$$\boldsymbol{n} = \frac{(-\frac{\partial\xi}{\partial x_1}, -\frac{\partial\xi}{\partial x_2}, 1)}{\sqrt{(\frac{\partial\xi}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial\xi}{\partial x_2})^2 + 1}}$$

Wektor wodzący punktów na powierzchni $\boldsymbol{x} = (x_1(t),\, x_2(t),\, \xi(x_1, x_2, t))$ zatem prędkość $\boldsymbol{u} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \frac{\partial\xi}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial\xi}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \frac{\partial\xi}{\partial t})$ jej rzut na kierunek normalny $\boldsymbol{n}$

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = \frac{\dot{x}_1\left(-\frac{\partial\xi}{\partial x_1}\right) + \dot{x}_2\left(-\frac{\partial\xi}{\partial x_2}\right) + \left(\frac{\partial\xi}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial\xi}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \frac{\partial\xi}{\partial t}\right)1}{\sqrt{(\frac{\partial\xi}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial\xi}{\partial x_2})^2 + 1}} = \frac{\frac{\partial\xi}{\partial t}}{\sqrt{(\frac{\partial\xi}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial\xi}{\partial x_2})^2 + 1}}$$

Z drugiej strony składowa normalna pola prędkości przepływu

$$\boldsymbol{v}\boldsymbol{n} = (v_1, v_2, v_3)\cdot\frac{(-\frac{\partial\xi}{\partial x_1}, -\frac{\partial\xi}{\partial x_2}, 1)}{\sqrt{(\frac{\partial\xi}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial\xi}{\partial x_2})^2 + 1}} = \frac{-v_1\frac{\partial\xi}{\partial x_1} - v_2\frac{\partial\xi}{\partial x_2} + v_3}{\sqrt{(\frac{\partial\xi}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial\xi}{\partial x_2})^2 + 1}}$$

Porównując stronami otrzymujemy

$$-v_1\frac{\partial\xi}{\partial x_1} - v_2\frac{\partial\xi}{\partial x_2} + v_3 = \frac{\partial\xi}{\partial t}$$

czyli

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + v_1\frac{\partial\xi}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial\xi}{\partial x_2} - v_3 = 0$$

Z definicji pochodnej substancjalnej (materialnej)

$$\frac{D\xi}{Dt} - \frac{Dx_3}{Dt} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{D}{Dt}\left(\xi(x_1, x_2, t) - x_3\right) = 0 \tag{3.18}$$

Widzimy więc, że jeśli w chwili początkowej $\xi(x_1, x_2, t) - x_3$ było równe zero (warunek, że cząstka znajduje się na powierzchni) to w trakcie przepływu jest ciągle równe zero. Oznacza to, że płyn na powierzchni cały czas na niej pozostaje.

3.7. Strumień pędu cieczy idealnej

Powtórzmy jeszcze raz rozważania nad równaniem ruchu cieczy idealnej.

Pęd płynu znajdującego się w objętości V wynosi $\int_V \varrho\boldsymbol{v}\,dx$ Zmiana pędu może odbywać się na skutek dizłania sił (objętościowych i powierzchniowych) oraz unoszenia pędu przez wypływający płyn

$$\frac{d}{dt}\int_V \varrho\boldsymbol{v}\,dx\,\delta t = \int_V \varrho\boldsymbol{f}\,dx\,\delta t + \int_{\partial V}(-p)\boldsymbol{n}\,d\sigma\delta t - \int_{\partial V}\varrho\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\delta t\,d\sigma \tag{3.19}$$

gdzie lewa strona oznacza przyrost pędu, natomiast składniki po prawej stronie oznaczają odpowiednio popęd sił objętościowych, powierzchniowych oraz ubytek pędu związany z wypłynięciem objętości płynu $(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\delta t\,d\sigma$. Drugą całkę po prawej stronie możemy zgodnie ze wzorem (2.6c) z paragrafu 2.2 zamienić na całkę po objętości

$$\int_{\partial V}(-p)\boldsymbol{n}\,d\sigma = -\int_V \mathtt{grad}\,p\,dx$$

Wybieramy pewną bazę przestrzeni wektorowej $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. Wtedy szybkość zmiany i-tej składowej pędu

$$\frac{d}{dt}\int_V \varrho v_i\, dx \;=\; \int_V \varrho f_i\, dx \;-\; \int_V \frac{\partial p}{\partial x_i}\, dx - \int_{\partial V} \varrho v_i(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\, d\sigma$$

Ale (porównaj tw. Gaussa-Ostrogradskiego (2.6d))

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_V \varrho v_i\, dx &= \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\varrho v_i)\; dx \\ \int_{\partial V} \varrho v_i(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\, d\sigma &= \int_{\partial V} (\varrho v_i \boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma \;=\; \int_V \mathtt{div}\,(\varrho v_i \boldsymbol{v})\; dx\end{aligned}$$

Zatem

$$\int_V \left\{\frac{\partial}{\partial t}(\varrho v_i) + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\varrho v_i v_k) - \varrho f_i\right\} dx \;=\; 0 \tag{3.20}$$

Z dowolności obszaru V wynika równanie [zauważmy, że wyraz $\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k}(\delta_{ik} p)$ gdzie δ_{ik} jest deltą Kroneckera tzn. współczynnikami tensora jednostkowego]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\delta_{ik} p + \varrho v_i v_k) = \varrho f_i \quad i = 1, 2, 3. \tag{3.21}$$

Jeżeli siły objętościowe znikają to pęd jednostki objętości cieczy równy $\varrho\boldsymbol{v}$ jest zachowany [porównaj uwagi po wzorze ciągłości (3.2)].

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}[\delta_{ik} p + \varrho v_i v_k] = 0 \quad i = 1, 2, 3.$$

Tym razem gęstość prądu $\pi_{ik} := p\delta_{ik} + \varrho v_k v_i$ jest tensorem [ściślej π_{ik} są współczynnikami macierzy tego tensora w wybranej bazie] Działanie tego tensora na dowolny wektor $\boldsymbol{n}$ daje wektor $\hat{\pi}(\boldsymbol{n})$ postaci

$$\hat{\pi}(\boldsymbol{n}) = p\boldsymbol{n} + \varrho\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}).$$

Oznaczając przez $\boldsymbol{\pi}_i$ wektor będący wartością tensora $\hat{\pi}$ na i-tym wektorze bazowym e_i

$$\boldsymbol{\pi}_i := \hat{\pi}(e_i) = pe_i + \varrho\; \boldsymbol{v} v_i \tag{3.22}$$

wzór (3.24) możemy przepisać w postaci

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho v_i) = -\mathtt{div}\boldsymbol{\pi_i} + \varrho f_i \tag{3.23}$$

Aby zinterpretować tensor $\hat{\pi}$ całkujemy równanie (3.23) po pewnej objętości V w szczególnym przypadku gdy siły objętościowe $\vec{f}$ są równe zero

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int_V \varrho v_i\, dV &= -\int_V \mathtt{div}\boldsymbol{\pi_i}\, dV \;=\; \{\text{tw. Gaussa-Ostrogradskiego}\} \\ &= -\oint_{\partial V} \boldsymbol{\pi}_i\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma\end{aligned} \tag{3.24}$$

gdzie $\boldsymbol{n}$ jest jednostkowym wektorem normalnym do elementu powierzchni $d\sigma$

Lewa strona (3.24) opisuje szybkość zmian i-tej składowej pędu objętości V. Zatem całka po prawej stronie opisuje i-tą składową pędu wypływającą przez powierzchnię ∂V ograniczającą objętość V. Wielkość $\boldsymbol{\pi}_i\cdot\boldsymbol{n}$ jest strumieniem i-tej składowej pędu na jednostkę powierzchni o wektorze normalnym $\boldsymbol{n}$. Współrzędna π_{ik} tensora $\hat{\pi}$ jest zatem i-tą składową pędu przepływającą w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni prostopadłej do e_k. Tensor $\hat{\pi}$ nazywa się *tensorem gęstości strumienia pędu.*

Zadanie 3.3. Znaleźć parcie (siłę ciśnienia) na zgiętym kawałku rury, przez którą przepływa ciecz nieściśliwa, a przepływ jest ustalony. ♠

3.8. Równanie Bernoulliego

Wyprowadzimy równanie mające sens *zasady zachowania energii* przy następujących założeniach:

1. ciecz jest idealna tzn. $S = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$ i spełnione jest równanie Eulera,
2. fizyczne równanie płynu jest postaci $\varrho = \varrho(p)$,
3. zewnętrzne siły objętościowe są zachowawcze tzn. $\boldsymbol{f} = -\mathtt{grad}\, V$.

Z założenia (2) możemy zdefiniować funkcję $\mathcal{P}(p) := \int\limits_{p_0}^{p} \frac{1}{\varrho(p')}\, dp'$ górnej granicy całkowania. Wtedy zgodnie z regułą różniczkowania funkcji złożonej

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{1}{\varrho(p)}\frac{\partial p}{\partial x_i} \quad \Longrightarrow \quad \mathtt{grad}\,\mathcal{P} = \frac{1}{\varrho}\mathtt{grad}\, p \tag{3.25}$$

Zauważmy, że jeśli ciecz jest nieściśliwa $\varrho = const$ to $\mathtt{grad}\,\mathcal{P} = \mathtt{grad}\,[\frac{1}{\varrho}\, p]$.

Wychodzimy od równania Eulera (3.9)

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f} - \frac{1}{\varrho}\mathtt{grad}\, p$$

Z założenia (4) prawa strona jest równa $\boldsymbol{f} - \frac{1}{\varrho}\mathtt{grad}\, p = -\mathtt{grad}\, V - \frac{1}{\varrho}\mathtt{grad}\, p$. Na mocy założenia (2) możemy wykorzystać równość (3.25). Otrzymamy zatem

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\mathtt{grad}\,(V + \mathcal{P})$$

Z lewej strony skorzystamy z tożsamości[3]

$$\frac{1}{2}\mathtt{grad}\left(\boldsymbol{A}^2\right) = (\boldsymbol{A}\cdot\mathtt{grad})\,\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\times\mathtt{rot}\,\boldsymbol{A} \tag{3.26}$$

Stosując ją do pola wektorowego prędkości $\boldsymbol{v}$ otrzymamy

$$\frac{1}{2}\mathtt{grad}\left(\boldsymbol{v}^2\right) = (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\times\mathtt{rot}\,\boldsymbol{v}$$

Po podstawieniu otrzymamy

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \mathtt{grad}(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2) - \boldsymbol{v}\times\mathtt{rot}\,\boldsymbol{v} = -\mathtt{grad}\,(V + \mathcal{P})$$

Równoważnie

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} - \boldsymbol{v}\times\mathtt{rot}\,\boldsymbol{v} = -\mathtt{grad}\left(V + \mathcal{P} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\right) \tag{3.27}$$

Stąd wynikają dwie formy twierdzenia Bernoulliego.

---

[3] Rzeczywiście, we współrzędnych kartezjańskich, dla pierwszej składowej mamy

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2\right) &= A_1\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + A_2\frac{\partial A_2}{\partial x_1} + A_3\frac{\partial A_3}{\partial x_1} \\
&= A_1\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + A_2\frac{\partial A_1}{\partial x_2} + A_3\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - A_2\frac{\partial A_1}{\partial x_2} - A_3\frac{\partial A_1}{\partial x_3} + A_2\frac{\partial A_2}{\partial x_1} + A_3\frac{\partial A_3}{\partial x_1} \\
&= \left(A_1\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + A_2\frac{\partial A_1}{\partial x_2} + A_3\frac{\partial A_1}{\partial x_3}\right) + A_2\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right) - A_3\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right) \\
&= (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\,A_1 + A_2\,(\mathtt{rot}\,\boldsymbol{A})_3 - A_3\,(\mathtt{rot}\,\boldsymbol{A})_2 \\
&= (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\,A_1 + (\boldsymbol{A}\times\mathtt{rot}\,\boldsymbol{A})_1
\end{aligned}$$

Analogicznie dla pozostałych składowych.

Twierdzenie 3.2.

Jeżeli przepływ jest	
ustalony tzn $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = 0$	bezwirowy $\mathtt{rot}\,\boldsymbol{v} = 0$ czyli istnieje potencjał prędkości $\boldsymbol{v} = \mathtt{grad}\,\varphi$
wtedy wielkość	
$\Psi = V + \mathcal{P} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2$	$\widetilde{\Psi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + V + \mathcal{P} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2$
spełnia warunek	
$\boldsymbol{v} \cdot \mathtt{grad}\left(V + \mathcal{P} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\right) = 0$	$\mathtt{grad}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V + \mathcal{P} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\right) = 0$
skąd wynika, że	
$\Psi = \left(V + \mathcal{P} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\right)$ jest stała wzdłuż toru ruchu.	$\widetilde{\Psi}(t) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V + \mathcal{P} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\right)$ jest niezależne od położenia w przestrzeni

Związek równania Bernoulliego z zasadą zachowania energii.

3.9. Proste przykłady

Zadanie 3.4. `Hydrostatyka` [3] ♠

Zadanie 3.5. `Paradoks hydrostatyczny.` [3]Wyznaczyć rozkład ciśnienia w słupie cieczy. ♠

Zadanie 3.6. Wyznaczyć kształt powierzchni swobodnej cieczy nieściśliwej znajdującej się w polu siły ciężkości w naczyniu cylindrycznym, które obraca się wokół swej osi ze stałą prędkością kątową ω. ♠

Zadanie 3.7. `Prawo Archimedesa.` Wyprowadzić prawo wyporu Archimedesa. ♠

`Rozwiązanie.` Rozważmy ciecz w równowadze. Wytnijmy w myśli pewien obszar V ograniczony powierzchnią $\mathcal{S} = \partial V$ ($\mathcal{S}$ jest brzegiem obszaru V). Na element powierzchni $d\sigma$ działają siły powierzchniowe $-pd\boldsymbol{\sigma}$. Całkując po całej powierzchni $\mathcal{S}$ otrzymamy wypadkową siłę (parcie) $\boldsymbol{F}_W$ z jaką otaczająca ciecz działa na ciecz wewnątrz obszaru V

$$\boldsymbol{F}_W = \oint_{\mathcal{S}=\partial V} (-p) d\boldsymbol{\sigma} = -\int_V \mathtt{grad}\, p\, dx.$$

Korzystając z równania Eulera możemy wyznaczyć $\mathtt{grad}\, p$. Z założenia ciecz jest w równowadze statycznej więc równanie ruchu (Eulera) redukuje się do postaci

$$0 = \varrho \boldsymbol{f} - \mathtt{grad}\, p$$

gdzie $\varrho \boldsymbol{f}$ jest zewnętrzną siłą objętościową. Pozwala to znaleźć wartość siły parcia

$$\boldsymbol{F}_W = -\int_V \mathtt{grad}\ \mathtt{p}\, dx = -\int_V \varrho \boldsymbol{f}\, dx.$$

Czyli siła parcia jest równa wypadkowej zewnętrznych sił objętościowych działających na ciecz znajdującą się wewnątrz obszaru V lecz skierowaną przeciwnie.

Gdy w obszarze V umieścimy zamiast cieczy inne ciało to siła wyporu $\boldsymbol{F}_W$ nie ulegnie zmianie bowiem jest to wypadkowa siła z jaką otaczająca ciecz działa przez powierzchnię graniczną $\mathcal{S} = \partial V$.

Prawo Archimedesa otrzymamy gdy jako siłę zewnętrzną przyjmiemy siłę ciężkości $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}$ (przyspieszenie ziemskie) i założymy, że gęstość cieczy jest taka sama w każdym punkcie

$$\boldsymbol{F}_W = -\int_V \varrho \boldsymbol{g}\, dx = -\varrho\, \boldsymbol{g}\, \mathtt{vol}(V)$$

gdzie $\mathtt{vol}(V) = \int_V dx$ jest objętością obszaru V. ♠

Rozdział 4

Ruch potencjalny.

W tym rozdziale przyjrzymy się pojęciu momentu pędu cząstki cieczy wokół jej środka masy. Na początek określimy pojęcie wirowości (wiru) prędkości wraz z fundamentalnymi twierdzeniami dotyczącymi zachowania wirów. W drugim paragrafie rozpatrzymy ruch bezwirowy.

4.1. Wirowość.

Mając dane pole wektora prędkości $\boldsymbol{v}$ definiujemy pole

$$\boldsymbol{\omega} = \mathtt{rot}\boldsymbol{v}. \tag{4.1}$$

Nazywać je będziemy *wirowością* (lub *wirem*) pola $\boldsymbol{v}$. Jej k-ta współrzędna wynosi

$$\omega_k = \epsilon_{kij}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \qquad \text{(suma po } i, j)$$

gdzie ϵ_{kij} jest tensorem całkowicie antysymetrycznym[1].

Interpretacja geometryczna. Aby zilustrować sens geometryczny dokonajmy rozwinięcia prędkości w szereg Taylora wokół punktu $\boldsymbol{x}_0$

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_0, t) + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \cdot \nabla|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{v} + O(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^2)$$

dla i-tej współrzędnej

$$v_i(\boldsymbol{x}, t) = v_i(\boldsymbol{x}_0, t) + (x_j - x_{0j})\frac{\partial v_i}{\partial x_j}|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} + O(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^2)$$

Tensor gradientu prędkości $\nabla\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$ możemy przedstawić jako sumę części symetrycznej i antysymetrycznej

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)}_{\text{symetryczna}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)}_{\text{antysymetryczna}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_k \end{aligned} \tag{4.2}$$

[1] Wielkość ϵ_{kij} jest właściwie pseudotensorem

$$\epsilon_{kij} = \begin{cases} (-1)^J & \text{gdzie } J \text{ ilość inwersji w ciągu } (i, j, k) \\ 0 & \text{gdy którykolwiek z indeksów się powtarza} \end{cases}$$

W dalszych rozważaniach przydatna będzie tożsamość

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

Ponieważ gradient prędkości jest na ogół różny od zera, więc elementy płynu są w trakcie przepływu deformowane i obracane. Cząstki poruszające się z prędkością $\boldsymbol{v}$ po upływie czasu δt przemieszczają się o wektor $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}\delta t$. Tensor gradientu przemieszczenia jest na mocy (4.2) równy

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{12} & u_{22} & u_{23} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\delta t \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

gdzie $u_{ij} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ są składowymi tensora odkształceń (tzw. tensora odkształceń Cauchy'ego). W ramach liniowej teorii małych odkształceń opisanej w §7.3 współrzędne te mają klarowną interpretację geometryczną. Współrzędne równo-wskaźnikowe (elementy na przekątnej) są odkształceniami liniowymi wzdłuż odpowiednich osi, a współrzędne różno-wskaźnikowe (poza przekątną) są odkształceniami kątowymi mierzonymi w płaszczyznach określonych indeksami współrzędnych. Natomiast antysymetryczna część tensora opisuje podwojony kąt obrotu w odpowiedniej płaszczyźnie czyli $\frac{1}{2}\omega_i$ jest prędkością kątową obrotu elementu płynu wokół i-tej osi.

Biorąc materialny element liniowy $\delta\boldsymbol{\ell}$ tzn. utworzony z cząstek płynu, poruszających się wraz płynem, o początku $\boldsymbol{x_1}(t)$ i końcu $\boldsymbol{x_2}(t)$. Przy tych oznaczeniach $\delta\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{x_1}(t) - \boldsymbol{x_1}(t)$. Wtedy zmiana w czasie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{\ell} &= \frac{d\boldsymbol{x_2}}{dt} - \frac{d\boldsymbol{x_1}}{dt} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x_2}, t) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x_1}, t) \\ &= \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x_1} + \delta\boldsymbol{\ell}, t) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x_1}, t) \\ &= \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x_1}, t) + (\delta\boldsymbol{\ell} \cdot \mathtt{grad})\, \boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x_1}} + O\left(|\delta\boldsymbol{\ell}|^2\right) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x_1}, t) \\ &= (\delta\boldsymbol{\ell} \cdot \mathtt{grad})\, \boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x_1}} + O\left(|\delta\boldsymbol{\ell}|^2\right) \end{aligned}$$

Stąd w granicy infinitezymalnego $\delta\boldsymbol{\ell}$ otrzymujemy równanie ruchu materialnego elementu liniowego

$$\frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{\ell} = (\delta\boldsymbol{\ell} \cdot \mathtt{grad})\boldsymbol{v}\,. \tag{4.4}$$

Zadanie 4.1. Przeanalizować, w zależności od początkowego kierunku, ruch materialnego elementu liniowego $\delta\boldsymbol{\ell}$, umieszczonego w początku układu współrzędnych, dla pola prędkości wokół punktu stagnacji (Ten rodzaj przepływu opisany jest w dodatku 4.4 do tego rozdziału), postaci $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ -\alpha x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha > 0$. Rozważyć przypadki

1) $\delta\boldsymbol{\ell} = \begin{bmatrix} \delta\ell_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 2) $\delta\boldsymbol{\ell} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta\ell_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ 3) $\delta\boldsymbol{\ell} = \begin{bmatrix} \delta\ell_1 \\ \delta\ell_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ♠

`Odpowiedź.` 1) Element będzie rozciągany $\delta\boldsymbol{\ell} = \delta\ell_{10}\begin{bmatrix} e^{\alpha t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. 2) Element będzie się kurczył $\delta\boldsymbol{\ell} = \delta\ell_{20}\begin{bmatrix} 0 \\ e^{-\alpha t} \\ 0 \end{bmatrix}$. 3) Element będzie się obracał zgodnie z ruchem wskazówek zegara jednocześnie rozciągając $\delta\boldsymbol{\ell} = \begin{bmatrix} \delta\ell_{10}e^{\alpha t} \\ \delta\ell_{20}e^{-\alpha t} \\ 0 \end{bmatrix}$, ♠

`Przykład.` Rozważmy przepływ opisany polem prędkości postaci sumy $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{roz} + \boldsymbol{v}_{wir}$ gdzie $\boldsymbol{v}_{roz} = \begin{bmatrix} -\beta x_1 \\ -\beta x_2 \\ 2\beta x_3 \end{bmatrix}$, $\beta > 0$. Gradient tego składnika prędkości $\nabla\boldsymbol{v}_{roz} = \begin{bmatrix} -\beta & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 2\beta \end{bmatrix}$ czyli

opisuje rozciąganie bez zmiany objętości (jako bezśladowy - porównaj paragraf 7.4). Ponadto $\mathtt{rot}\boldsymbol{v}_{roz} = 0$ Niech drugi składnik opisuje wirowanie $\boldsymbol{v}_{wir} = \Omega(r,t)\begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ gdzie $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Wtedy $\mathtt{rot}\boldsymbol{v}_{wir} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1\Omega) - \frac{\partial}{\partial x_2}(-x_2\Omega) = 2\Omega + x_1\frac{\partial\Omega}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial\Omega}{\partial x_2} \\ &= 2\Omega + x_1\frac{\partial\Omega}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial\Omega}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_2} = 2\Omega + r\frac{\partial\Omega}{\partial r} \quad \xrightarrow{r\to 0} 2\Omega(0,t) \end{aligned} \tag{4.5}$$

W tym polu prędkości element $\delta\boldsymbol{\ell}$ równoległy do osi $0x_3$ spełnia

$$\frac{d\delta\boldsymbol{\ell}}{dt} = (\delta\boldsymbol{\ell}\cdot\mathtt{grad}\,)\,\boldsymbol{v} = \delta\ell_3\frac{\partial}{\partial x_3}\begin{bmatrix} -\beta x_1 - \Omega x_2 \\ -\beta x_2 + \Omega x_1 \\ 2\beta x_3 \end{bmatrix} = \delta\ell_3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\beta \end{bmatrix}$$

czyli $\frac{d}{dt}(\delta\boldsymbol{\ell}_3) = \delta\boldsymbol{\ell}_3 2\beta \Longrightarrow \delta\boldsymbol{\ell}_3 = const\, e^{2\beta t}$. Taki element jest jedynie rozciągany.

Gdy w początku układu współrzędnych rozważymy element objętości, w kształcie cylindra, o długości $\delta\ell$ i polu powierzchni δS, a osi symetrii pokrywającej się z osią $0x_3$ to:

— cylinder będzie obracał się z prędkością $\Omega(0,t)$ (na mocy (4.5)),

— podczas rozciągania wzdłuż osi symetrii przekrój poprzeczny cylindra będzie zachowywał swój okrągły kształt (na mocy symetrii),

— objętość cylindra pozostanie stała (bowiem ślad macierzy $\nabla\boldsymbol{v} = 0$) $\Longrightarrow \mathtt{vol} = \delta\boldsymbol{\ell}\delta S = const$, dla cieczy nieściśliwej oznacza to jednocześnie, że masa cylindra się niezmienia,

— moment pędu cylindra pozostanie stały (siły ciśnienia działające na powierzchni cylindra mają kierunek prostopadły do osi obrotu, więc ich moment jest równy zero) $\Longrightarrow \omega\delta S = const$ (Rzeczywiście, moment pędu $\sim$ moment bezwładności $\times$ prędkość kątowa $\sim$ masa $\times$ prędkość kątowa $\times$ (promień przekroju poprzecznego)^2 ale (promień przekroju poprzecznego)$^2 \sim \delta S$)

Stąd wynika

$$\omega \sim \delta\ell \quad \text{czyli} \quad \frac{\widetilde{\omega}}{\omega} = \frac{\widetilde{\delta\ell}}{\delta\ell}$$

gdzie $\widetilde{\omega}$ oraz $\widetilde{\delta\ell}$ oznaczają wartości w chwili $\tilde{t} > t$. Jako wniosek możemy sformułować stwierdzenie, że "*rozciąganie wzmaga wirowość*". Widocznym przykładem tego stwierdzenia jest spływająca woda w umywalce, efekt ten widoczny jest również w cyklonach i tornadach. ♣

W równaniu Eulera

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f} - \frac{1}{\varrho}\mathtt{grad}\,p$$

Dla

— sił zewnętrznych potencjalnych $\boldsymbol{f} = -\mathtt{grad}V$,

— cieczy nieściśliwej (ze względu na stałą wartość, można wprowadzić gęstość ϱ pod znak gradientu).

Korzystając ze wzoru (3.26) równanie ruchu przekształcamy do postaci

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \mathtt{grad}(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2) - \boldsymbol{v}\times\mathtt{rot}\,\boldsymbol{v} = -\mathtt{grad}\left(V + \frac{p}{\varrho}\right)$$

Działając na obie strony tego równania operatorem $\mathtt{rot}$ (pamiętając, że rotacja gradientu znika), otrzymujemy równanie zawierające tylko prędkość

$$\frac{\partial\mathtt{rot}\,\boldsymbol{v}}{\partial t} - \mathtt{rot}\,(\boldsymbol{v}\times\mathtt{rot}\,\boldsymbol{v}) = 0. \tag{4.6}$$

Drugi składnik po lewej stronie wynosi[2]

$$\mathtt{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}) = (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathtt{grad})\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\,(\mathtt{div}\,\boldsymbol{\omega}) - (\boldsymbol{v}\cdot\mathtt{grad})\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}\,(\mathtt{div}\,\boldsymbol{v})$$

Dla cieczy nieściśliwej $\mathtt{div}\,\boldsymbol{v} = 0$, ponadto znika $0 = \mathtt{div}\,\boldsymbol{\omega} = \mathtt{div}\,(\mathtt{rot}\,\boldsymbol{v})$. Podstawiając otrzymujemy

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} - (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathtt{grad})\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\mathtt{grad})\boldsymbol{\omega} = 0.$$

czyli

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathtt{grad})\boldsymbol{v} \tag{4.7}$$

gdzie po lewej stronie $\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \dfrac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\mathtt{grad})\boldsymbol{\omega}$ jak zwykle oznacza pochodną substancjalną (materialną). Równanie (4.7) jest identyczne z równaniem (4.4) dla liniowego elementu materialnego. Zatem *wiry poruszają się jak gdyby były materialnymi elementami liniowymi.*

4.2. Twierdzenie Kelwina o zachowaniu krążenia.

Całkowym odpowiednikiem wirowości jest *cyrkulacja* (inaczej *krążenie* (porównaj twierdzenie Stokesa (2.6f))

$$C := \oint_\Gamma \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{\ell} \tag{4.8}$$

Udowodnimy teraz fundamentalne twierdzenie dotyczące cyrkulacji

Twierdzenie 4.1. (Kelwina - o zachowaniu krążenia)
Dla nielepkiej cieczy , o równaniu stanu postaci $\varrho = \varrho(p)$ (w szczególności dla nieściśliwej), na którą działają siły potencjalne cyrkulacja pola prędkości wzdłuż materialnej krzywej zamkniętej pozostaje stała.

Dowód. Niech Γ_t oznacza materialną krzywą zamkniętą w chwili t, sparametryzowaną przez $0 \leqslant a \leqslant 1$

$$\Gamma_t = \left\{ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\,,\quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}(a,t)\,,\ 0\leqslant a\leqslant 1 \right\}$$

Współrzędne $\boldsymbol{X}(a,t)$ stanowią współrzędne Lagrange'a (materialne - śledzimy z upływem czasu tor konkretnych cząstek numerowanych przez a). Wtedy $\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{X}(a,t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{X}(a,t),t)$ wyznacza pole prędkości. Przy tych oznaczeniach cyrkulacja

$$C := \oint_\Gamma \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_0^1 \boldsymbol{v}(\boldsymbol{X}(a,t),t)\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial a}\,da$$

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dt} &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{v}(\boldsymbol{X}(a,t),t)\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial a}\right]da = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left[v_k\frac{\partial X_k}{\partial a}\right]da\\ &= \int_0^1\left[\frac{dv_k}{dt}\frac{\partial X_k}{\partial a} + v_k\frac{\partial^2 X_k}{\partial a\partial t}\right]da\end{aligned}$$

[2] Napiszmy dla i-tej składowej

$$\begin{aligned}[\mathtt{rot}\,(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega})]_i &= \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}(\varepsilon_{klm}v_l\omega_m) = \quad \{\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\ \}\\ &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\frac{\partial}{\partial x_j}(v_l\omega_m)\\ &= \frac{\partial}{\partial x_j}(v_i\omega_j) - \frac{\partial}{\partial x_j}(v_j\omega_i) = \omega_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i\frac{\partial\omega_j}{\partial x_j} - v_j\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j} - \omega_i\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\\ &= (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathtt{grad})v_i + v_i\,(\mathtt{div}\,\boldsymbol{\omega}) - (\boldsymbol{v}\cdot\mathtt{grad})\omega_i - \omega_i\,(\mathtt{div}\,\boldsymbol{v})\end{aligned}$$

Pod znakiem całki wyraz $\frac{dv_k}{dt}$ stanowi lewą stronę równania Eulera (3.9), podstawiamy w nim dla sił zachowawczych $\boldsymbol{f} = -\mathtt{grad}V$, dla równania stanu $\varrho = \varrho(p)$ w miejsce $\frac{1}{\varrho}\mathtt{grad}p = \mathtt{grad}\mathcal{P}$ otrzymamy

$$\frac{dv_k}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x_k}(\mathcal{P} + V)$$

W konsekwencji $\frac{dv_k}{dt}\frac{\partial X_k}{\partial a} = -\frac{\partial}{\partial x_k}(\mathcal{P} + V)\frac{\partial X_k}{\partial a}$ czyli ze wzoru na różniczkowanie funkcji złożonej jest to $-\frac{\partial}{\partial a}(\mathcal{P} + V)$. W drugim składniku $v_k\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial X_k}{\partial t}\right) = v_k\frac{\partial}{\partial a}(v_k) = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2\right)$. Podstawiając do całki

$$\frac{dC}{dt} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a}\left[-(\mathcal{P} + V) + \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2\right] da = \left[-(\mathcal{P} + V) + \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2\right]_{a=0}^{a=1}$$

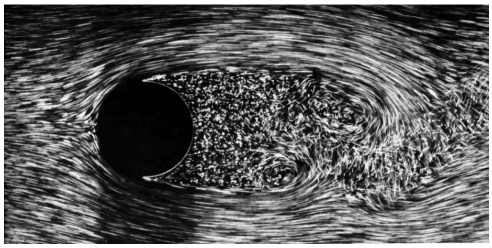
Ale krzywa z założenia jest zamknięta czyli $a = 0$ i $a = 1$ odpowiadają temu samemu punktowi w przestrzeni zatem $\left[-(\mathcal{P} + V) + \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2\right]_{a=0}^{a=1} = 0$. Stąd wynika teza $\frac{dC}{dt} = 0$. ■

Uwaga 4.1.

1. Przepływ nazywamy bezwirowym wtedy i tylko wtedy gdy wszędzie (dla każdego punktu)

$$\boldsymbol{\omega} = \mathtt{rot}\boldsymbol{v} = 0.$$

   Jeżeli w jakiejś chwili ruch był bezwirowy to takim pozostaje.
   Dowód. Reductio ad absurdum. Załóżmy, że w chwili $t = 0$ ruch był bezwirowy. Jeżeli dla $t > 0$ istnieje taki punkt x_0, że $\boldsymbol{\omega}|_{\boldsymbol{x}_0} = 0$ to z ciągłości tego pola wynika, że również w pewnym otoczeniu Ω tego punktu $\mathtt{rot}\boldsymbol{v} \neq 0$. Istnieje zatem powierzchnia $\mathcal{S} \subset \Omega$ taka, że w chwili $t > 0$ całka $\int_{\mathcal{S}} \mathtt{rot}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}d\sigma \neq 0$. Ale $\int_{\mathcal{S}} \mathtt{rot}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}d\sigma = \int_{\partial\mathcal{S}} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ równa jest cyrkulacji pola prędkości wzdłuż brzegu powierzchni $\mathcal{S}$. Z twierdzenia o stałości krążenia wynika, że również w chwili początkowej nie mogło ono znikać wzdłuż krzywej materialnej Γ_0, która po upływie czasu t tworzy $\partial\mathcal{S}$. Implikuje to nieznikanie całki po powierzchni $\mathcal{S}_0$ rozpiętej na konturze Γ_0 $\int_{\mathcal{S}_0} \mathtt{rot}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}d\sigma \neq 0$. W konsekwencji otrzymujemy sprzeczność $\mathtt{rot}\boldsymbol{v}|_{t=0} \neq 0$ w punktach leżących na powierzchni $\mathcal{S}_0$ wbrew pierwotnemu założeniu o bezwirowości ruchu w chwili $t = 0$.
2. Ważnym przypadkiem szczególnym jest płyn, który początkowo był w spoczynku.
3. Twierdzenie Kelwina wskazuje również jak się mogą tworzyć (lub znikać) wiry. Mogą one mianowicie (przy założeniach twierdzenia - ciecz nielepka, siły potencjalne) jedynie "wskakiwąć" do (lub "uciekać" z) obszaru poprzez jego granice np. granice przeszkód.



Rysunek **4.1.** *Opływ przeszkody. Z tyłu za przeszkodą widoczny obszar występowania wirów. Źródło: Milton Van Dyke, An Album of Fluid Motion, Parabolic Press, 12th edition, 1982.*

4.3. Przykłady ruchu potencjalnego cieczy nieściśliwej

Zauważmy, że dla przepływu potencjalnego, jaki chcemy zbadać w tym paragrafie $\mathtt{rot}\,\boldsymbol{v} = 0$ i równanie ruchu (wynikające z równania Eulera) (4.6) jest spełnione tożsamościowo. Tak więc jedynym równaniem opisującym ruch cieczy jest równanie ciągłości, które dla $\varrho = const$ przybiera prostą postać

$$\mathtt{div}\,\boldsymbol{v} = 0 \tag{4.9}$$

Wprowadzamy potenjał prędkości:

$$\boldsymbol{v} = \mathtt{grad}\,\phi$$

Podstawiając definicję potencjału prędkości do równania ciągłości (4.9) otrzymujemy równanie Laplace'a

$$\triangle\phi = 0 \tag{4.10}$$

opisujące ruch cieczy w rozważanym przypadku.

4.3.1. Ruch 3D z symetrią osiową.

We współrzędnych sferycznych ma ono postać (2.23d)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Rozważmy przypadek szczególny o symetrii osiowej tzn. załóżmy, że rozwiązanie jest niezmiennicze na obroty wokół pewnej osi. Wybierając układ współrzędnych w taki sposób aby ta oś pokrywała się z osią $0x_3$ warunek symetrii osiowej będzie miał prostą postać

$$\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = 0 \qquad \phi \text{ nie zależy od zmiennej } \varphi$$

Spróbujmy zatem znaleźć rozwiązania równania Laplace'a o symetrii osiowej

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) = 0. \tag{4.11}$$

Poszukajmy ich metodą rozdzielenia zmiennych. Postulujemy rozwiązanie postaci

$$\phi(r,\theta) = r^n Q_n(\theta)$$

Podstawiając do równania otrzymujemy

$$n(n-1)r^{n-2}Q_n(\theta) + \frac{2}{r}nr^{n-1}Q_n(\theta) + \frac{1}{r^2}r^n\frac{d^2Q_n}{d\theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}r^n\frac{dQ_n}{d\theta} = 0$$

czyli

$$r^{n-2}\left\{\left[n(n-1)+2n\right]Q_n(\theta) + \frac{d^2Q_n}{d\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{dQ_n}{d\theta}\right\} = 0. \tag{4.12}$$

Dokonajmy zamiany zmiennych

$$\mu = \cos\theta\,, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mu}{d\theta} = -\sin\theta$$

Oznaczmy

$$Q_n(\theta(\mu)) = P_n(\mu)$$

Wtedy

$$\frac{dQ_n}{d\theta} = \frac{dP_n}{d\mu}\frac{d\mu}{d\theta} = \frac{dP_n}{d\mu}(-\sin\theta) = -\frac{dP_n}{d\mu}\sqrt{1-\mu^2}$$

oraz druga pochodna

$$\begin{aligned}\frac{d^2Q_n}{d\theta^2} &= \frac{d}{d\theta}\left[\frac{dP_n}{d\mu}\frac{d\mu}{d\theta}\right] = \frac{d^2P_n}{d\mu^2}\left(\frac{d\mu}{d\theta}\right)^2 + \frac{dP_n}{d\mu}\frac{d^2\mu}{d\theta^2}\\ &= \frac{d^2P_n}{d\mu^2}\sin^2\theta + \frac{dP_n}{d\mu}(-\cos\theta) = \frac{d^2P_n}{d\mu^2}\left(1-\mu^2\right) - \mu\frac{dP_n}{d\mu}\end{aligned}$$

Podstawiając do równania (4.12) otrzymujemy

$$r^{n-2}\left\{n(n+1)P_n(\mu)+(1-\mu^2)\frac{d^2P_n}{d\mu^2}-\mu\frac{dP_n}{d\mu}+\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}\frac{dP_n}{d\mu}(-\sqrt{1-\mu^2})\right\}=0.$$

czyli

$$r^{n-2}\left\{n(n+1)P_n(\mu)+\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dP_n}{d\mu}\right]\right\}=0. \tag{4.13}$$

Ale z kursu metod matematycznych w fizyce wiemy, że rozwiązaniem równania $\{\ \}=0$ są wielomiany Legandre'a

$$P_n(\mu)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\mu^n}\left[\left(\mu^2-1\right)^n\right] \tag{4.14}$$

Zadanie 4.2. Sprawdzić, że wielomiany (4.14) spełniają równanie $n(n+1)P_n(\mu)+\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dP_n}{d\mu}\right]=0.$ ♠

`Wskazówka.` Rozważyć $W_n(\mu):=(\mu^2-1)^n$. Sprawdzić tożsamość $(\mu^2-1)W_n'-2n\mu W_n=0$. Zróżniczkować ją $n+1$ krotnie. ♠

Pierwsze cztery wielomiany Legandre'a

$$P_0(\mu)=1\,,\quad P_1(\mu)=\mu\,,\quad P_2(\mu)=\frac{3}{2}\mu^2-\frac{1}{2}\,,\quad P_3(\mu)=\frac{5}{2}\mu^3-\frac{3}{2}\mu.$$

Zadanie 4.3. Sprawdzić, że podstawienie w równaniu (4.11) $\phi(r,\theta)=\frac{S_n}{r^{n+1}}$ prowadzi do równania analogicznego do (4.12). ♠

Ogólnym rozwiązaniem równania Laplace' o symetrii osiowej otrzymanym metodą rozdzielenia zmiennych jest we współrzędnych sferycznych

$$\phi(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{A_nr^n+\frac{B_n}{r^{n+1}}\right\}P_n(\cos\theta) \tag{4.15}$$

gdzie A_n, B_n są stałymi dowolnymi. Ich wartość w rozwiązaniu szczególnym, musi być tak dobrana aby spełnione były zadane warunki brzegowe.

Przyjrzyjmy się oddzielnie trzem pierwszym składnikom sumy (4.15)

1. $B_0\neq 0$ wszystkie pozostałe A_n i B_n znikają.

   Jednostkowy wektor w kierunku promienia wodzącego oznaczmmy (jak w rozdziale 2) przez $\boldsymbol{e_r}=\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}=\frac{\boldsymbol{x}}{r}$.

$$\phi=\frac{B_0}{r}P_0(\cos\theta)=\frac{B_0}{r}\qquad\text{nie zależ od }\theta$$

$$\boldsymbol{v}=\mathtt{grad}\,\phi=-\frac{B_0\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3}=-\frac{B_0\boldsymbol{e_r}}{r^2}$$

   a) To rozwiązanie reprezentuje wypływ ze źródła lub do ścieku. W zależności od znaku stałej B_0 mamy do czynienia z wypływem na zawnątrz punktowego źródła umieszczonego w początku układu współrzędnych (gdy $B_0<0$) lub wpływem do ścieku (gdy $B_0>0$) i masa pojawia się lub znika w punkcie osobliwym (początku układu współrzędnych.)
   b) W obu przypadkach prędkość ma symetrię sferyczną.
   c) Warunek nieściśliwości jest oczywiście spełniony. Ze wzoru na dywrgencję we wsółrzędnych sferycznych (2.23b) mamy

$$\mathtt{div}\,\boldsymbol{v}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\boldsymbol{v}_r\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{B_0}{r^2}\right)=0$$

d) Spełniony jest warunek zachowania masy tzn. prąd przepływający przez dowolną powierzchnię zawierającą początek układu współrzędnych nie zależy od tej powierzchni. Dla prostoty wybierzmy sferę o promieniu R. Wtedy

$$\oint_S \varrho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} d\sigma = \oint_S \varrho(-\frac{B_0}{R^2})\boldsymbol{e_r} \cdot \boldsymbol{e_r} d\sigma = -\varrho \frac{B_0}{R^2} \oint_S d\sigma = \varrho \frac{B_0}{R^2} 4\pi R^2 = -4\pi\varrho B_0$$

nie zależy od promienia R.

2. $A_1 \neq 0$ wszystkie pozostałe A_n i B_n znikają

$$\phi = A_1 r P_1(\cos\theta) = A_1 r \cos\theta = A_1 z \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{v} = A_1 \boldsymbol{e_z}$$

gdzie z jest współrzędną kartezjańską wzdłuż osi symetrii układu $\boldsymbol{e_z}$ wersorem tej osi. Przedstawia zatem stały przepływ w kierunku osi $0z$.

3. $B_1 \neq 0$ wszystkie pozostałe A_n i B_n znikają

$$\phi = \frac{B_1}{r^2} P_1(\cos\theta) = \frac{B_1}{r^2}\cos\theta = \frac{B_1 z}{r^3} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{v} = B_1\left(\frac{\boldsymbol{e_z}}{r^3} - \frac{3z\boldsymbol{e_r}}{r^4}\right)$$

a) Jako bazę przestrzeni wektorowej wybraliśmy tu $\boldsymbol{e_r}, \boldsymbol{e_z}$ zamiast $\boldsymbol{e_r}, \boldsymbol{e_\theta}$, gdzie $\boldsymbol{e_z} = \cos\theta \boldsymbol{e_r} - \sin\theta \boldsymbol{e_\theta}$

b) Zauważmy, że $\boldsymbol{v} = B_1\left(\frac{\boldsymbol{e_z}}{r^3} - \frac{3z\boldsymbol{e_r}}{r^4}\right)$ możemy otrzymać z przypadku pierwszego tzn. $B_1\left(\frac{\boldsymbol{e_z}}{r^3} - \frac{3z\boldsymbol{e_r}}{r^4}\right) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{B_1 \boldsymbol{e_r}}{r^2}\right)$

Zadanie 4.4. `Potencjalny opływ kuli.` [1] Kula o promieniu R porusza się w nieściśliwej cieczy idealnej. Wyznaczyć rozkład prędkości wokół kuli, rozkład ciśnienia na powierzchni kuli i wypadkową siłę działającą na kulę. ♠

`Rozwiązanie.` Prędkość poruszającej się kuli oznaczmy $-\boldsymbol{u}$. Zakładamy, że w nieskończoności prędkość cieczy $\boldsymbol{v}$ znika. Aby mówić o stacjonarnym przepływie (polu prędkości) przejdźmy do układu odniesienia współporuszającego się z kulą i początku w środku kuli. W nim nieruchomą kulę opływa nadbiegająca z nieskończoności ciecz, poruszająca się ruchem potencjalnym. Na zewnątrz kuli potencjał prędkości opisuje równanie $\triangle\phi = 0$ dla $r > R$. Prędkość cieczy w nieskończoności $\boldsymbol{v}|_\infty = +\boldsymbol{u}$. Kierunek osi $0z$ wybieramy wzdłuż kierunku wektora $\boldsymbol{u}$. Z uwagi na symetię opływanego ciała układ charakteryzuje się symetrią osiową (względem $0z$). Rozwiązanie możemy więc przedstawić w postaci (4.15).

Skoro przepływ w nieskończoności ma być jednorodny to potencjał

$$\phi \to ur\cos\theta \quad \text{gdy} \quad r \to \infty$$

czyli dąży do przypadku (2) opisanego powyżej.

Ciecz nie wnika do wnętrza kuli czyli znika składowa normalna prędkości $\frac{\partial\phi}{\partial r} = 0$ na powierzchni $r = R$.

Mamy dwa warunki brzegowe, które pozwalają określić dwie stałe w rozwinięciu (4.15). Zauważmy jednak, że jedynym wielomianem Legandre'a liniowym w $\cos\theta$ (taką asymptotykę ma mieć potencjał ϕ) jest $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$. Zatem dla $n > 1$ wszystkie A_n, B_n będą równe zero i pozostaje

$$\phi = \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2}\right)\cos\theta\,.$$

Aby spełniony był warunek w nieskończoności stała $A_1 = u$. Aby spełniony był warunek na brzegu $r = R$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = \left(A_1 - 2\frac{B_1}{r^3}\right)\cos\theta = 0 \quad \text{dla każdego } \theta$$

Stąd $A_1 = 2B_1R^{-3}$ czyli $B_1 = \frac{1}{2}uR^3$. Zatem rozwiązaniem jest

$$\phi = u\left(r + \frac{R^3}{2r^2}\right)\cos\theta\,.$$

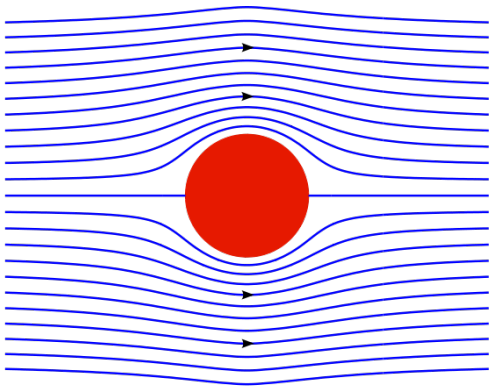
Odpowiadające mu pole prędkości

$$\boldsymbol{v} = u\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)\cos\theta\,\boldsymbol{e_r} - u\left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right)\sin\theta\,\boldsymbol{e_\theta}$$

Punktami stagnacji są $r = R, \theta = 0, \pi$ (czyli na powierzchni kuli na froncie i z tyły kuli), natomiast największą prędkość na powierzchni sfery jest w punktach $\theta = \pi/2$.

`Zadanie.` *W znanym pakiecie matematycznym wykreślić to pole wektorowe.*
`Wskazówka.` We współrzędnych kartezjańskich

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e_r} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e_\theta} = \begin{bmatrix} -\cos\theta\cos\varphi \\ -\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e_\varphi} = \begin{bmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \square$$



`Rysunek` **4.2.** *Krzywe całkowe pola prędkości.*
Źródło: wikipedia.org.

Rozkład ciśnienia na powierzchni i całkowita siła. Wykorzystamy prawo Bernoulliego dla ruchu potencjalnego, pod nieobecność sił objętościowych

$$p_\infty + \frac{1}{2}\varrho\,|\boldsymbol{v}_\infty|^2 = p + \frac{1}{2}\varrho\,|\boldsymbol{v}|^2$$

gdzie $p_\infty, \boldsymbol{v}_\infty = \boldsymbol{u}$ są odpowiednio wartościami ciśnienia i prędkości w nieskończoności. Stąd otrzymujemy rozkład ciśnienia, dla $r \geqslant R$

$$p(r,\theta) = p_\infty + \frac{1}{2}\varrho u^2\left[1 - \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)^2\cos^2\theta - \left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right)^2\sin^2\theta\right]$$

Znając ciśnienie możemy wyznaczyć siłę działającą na kulkę $\boldsymbol{F} = \int -p\boldsymbol{n}\,d\sigma$ gdzie całkujemy po całej powierchni kuli $r = R$. Wtedy $p|_{r=R}(\theta) = p_\infty + \frac{1}{2}\varrho u^2\left[1 - \frac{9}{4}\sin^2\theta\right]$, wektor normalny $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e_r}$. We współrzędnych kartezjańskich

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \int(-\,p|_{r=R})\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix} R^2\sin^2\theta\,d\theta\,d\varphi$$

Jak łatwo się przekonać siła ta znika (**paradoks d'Alamberta**). Dwie pierwsze składowe $F_1 = F_2 = 0$ znikają gdyż $\int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi = 0$. Natomiast $F_3 = 0$ bowiem $\int_0^{\pi} \cos\theta \sin^2\theta\, d\theta = \int_0^{\pi} \cos^3\theta \sin^2\theta\, d\theta = \int_0^{\pi} \cos\theta \sin^4\theta\, d\theta = 0$.

Pokazuje to ograniczenia modelu cieczy idealnej. Aby przewidzieć istnienie siły oporu trzeba założyć istnienie lepkości - porównaj §6.5.

Doświadczenie uczy, że przedstawiony opływ *nie jest dobrym* modelem przepływu wokół sztywnej kuli, ponieważ dochodzi tam do odrywania wirowej warstwy przyściennej i unoszenia jej w ślad torowy (kilwater) za kulą - porównaj rysunek 4.1. *Może być* natomiast *dobrym* modelem w przypadku, gdy opływana jest kula elastyczna np. pęcherzyk powietrza lub gdy ciecz opływa sztywną kulę wykonując drgania o częstotliwości $\gg u/R$. Należy wtedy przyjąć $u = u(t)$. Taki opływ może mieć miejsce gdy jego źródłem byłyby fale akustyczne w cieczy. ♠

4.3.2. Ruch 2D.

Bardzo często spotykamy układy niezmiennicze na translację w pewnym kierunku. Wybierając oś $0z$ wzdłuż tego właśnie kierunku otrzymujemy układ w którym wielkości fizyczne nie zależą od zmiennej z. Czyli ruch dwuwymiarowy. Równanie Laplace'a (4.10) na potencjał zapisane we współrzędnych cylindrycznych (patrz (2.22d)

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + r\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right] = 0$$

Daje gdy $\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0$ równanie dwuwymiarowe

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0 \tag{4.16}$$

Podobnie jak w wyżej omówionym przypadku możemy, rozdzielając zmienne, znaleźć ogólną postać potencjału

$$\Phi = A_0 \mathtt{ln} r + B_0\varphi + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n r^n \cos(n\varphi + \alpha_n) + B_n r^{-n}\cos(n\varphi + \beta_n)\right] \tag{4.17}$$

Na pierwszy rzut oka dwuwymiarowy i trójwymiarowy potencjał niewiele się różnią, oprócz tego, że w (4.17) występuje jeszcze funkcja logarytm. Fundamentalna różnica tkwi w obecności wyrazu liniowego w kącie φ, przez który potencjał Φ przestaje być funkcją (każdemu punktowi przyporządkowana jest jedna wartość) a staje się tzw. *funkcją wielowartościową*. Szerzej omówimy to zagadnienie w dodatku 4.4

Podobnie jak w w poprzednim paragrafie przyjrzymy się z osobna kilku pierwszym wyrazom.

1. $A_0 \neq 0$ wszystkie pozostałe wyrazy znikają.

$$\Phi = A_0 \mathtt{ln} r\,, \qquad \boldsymbol{v} = A_0\,\frac{1}{r}\boldsymbol{e}_r$$

   Analogicznie jak w w poprzednim paragrafie, w zależności od znaku stałej A_0 opisuje on wypływ ze źródła lub spływ do ścieku umieszczonego w $r = 0$ (odpowiada to punktowemu źródłu w 2D i linii źródeł wzdłuż osi $0z$ w 3D). Analogicznie całkowity strumień poprzez okrąg o promieniu R wynosi $2\pi R\,(\frac{A_0}{R}) = 2\pi A_0$ i jest niezależny od R.

2. $B_0 \neq 0$

$$\Phi = B_0\varphi\,, \qquad \boldsymbol{v} = B_0\,\frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\varphi$$

   Zauważmy, że potencjał Φ jest wielowartościowy, podczas gdy prędkość $\boldsymbol{v}$ jest jednoznacznie określona, tak jak powinno być aby miała sens fizyczny.

   Linie prądu (krzywe całkowe prędkości) tworzą koncentryczne okręgi. Cyrkulacja $\mathcal{C} = \oint \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{\ell}$ wzdłuż dowolnej krzywej zamkniętej obejmującej $r = 0$ jest taka sama jak wzdłuż okręgu

czyli $\mathcal{C} = 2\pi R(\frac{B_0}{R}) = 2\pi B_0$ (nie zależy od R) Zwyczajowo w aerodynamice oznacza się ją $2\pi B_0 =: \Gamma$. Natomiast cyrkulacja znika wzdłuz dowolnej krzywej zamkniętej nie obejmującej $r = 0$. Innymi słowy $\mathtt{rot}\boldsymbol{v} = 0$ wszędzie poza $r = 0$ gdzie mamy osobliwość typu delty Diraca $\delta(r)$ o gęstości Γ. W przypadku 3D mówimy o *linii wirów* wzdłuż osi $0z$. Superpozycja takich rozwiązań może służyć za model bardziej ogólnych przepływów wirowych.

3. $A_1 \neq 0$

$$\Phi = A_1 r\cos(\varphi + \alpha_1) = A_1 r(\cos\varphi\cos\alpha_1 - \sin\varphi\sin\alpha_1) = A_1(x\cos\alpha_1 - y\sin\alpha_1)$$

Stąd prędkość we współrzędnych kartezjańskich $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ wynosi

$$\boldsymbol{v} = A_1 \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 \\ -\sin\alpha_1 \end{bmatrix}$$

Reprezentuje ona przepływ ze stałą prędkością A_1 w kierunku $\varphi = -\alpha_1$. Podobnie jak w przypadku drugim poprzedniego paragrafu §4.3.1

Zadanie 4.5. `Potencjalny opływ nieskończonego walca.` Wyznaczyć rozkład prędkości cieczy idealnej opływającej (z cyrkulacją Γ) nieskończony walec. Wyznaczyć siłę nośną. ♠

`Rozwiązanie.` Załóżmy, że napływająca z nieskończoności ciecz ma prędkość $\boldsymbol{u}$ wzdłuż osi $0x$ z cyrkulacją Γ, czyli

$$\Phi = ur\cos\varphi + \frac{\Gamma}{2\pi}\varphi \qquad r \to \infty.$$

Na powierzchni walca $r = a$ znika składowa normalna prędkości

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = 0 \qquad \text{dla } r = a.$$

Przy tych założeniach rozwiązaniem jest

$$\Phi = u\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\varphi + \frac{\Gamma}{2\pi}\varphi$$

Stąd pole wektora prędkości (we współrzędnych cylindrycznych)

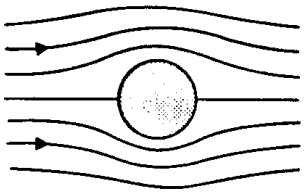
$$\boldsymbol{v} = \underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial r}}_{\text{radialna}}\boldsymbol{e}_r + \underbrace{\frac{1}{\partial r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}}_{\text{transwersalna}}\boldsymbol{e}_\varphi = u\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_r + \left[-u\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\varphi + \frac{\Gamma}{2\pi r}\right]\boldsymbol{e}_\varphi$$

Uprzedzając zastosowanie do teorii aerodynamiki w dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że Γ jest ujemne, tak że dodatkowy nałożony przepływ okrążający jest zgodny z ruchem wskazówek zegara. Wprowadźmy oznaczenie $B := -\dfrac{\Gamma}{2\pi ua}$, wtedy $B \geqslant 0$. Przy tym oznaczeniu

$$\boldsymbol{v} = u\left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2\right]\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_r - u\left\{\left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right]\sin\varphi + B\frac{a}{r}\right\}\boldsymbol{e}_\varphi \tag{4.18}$$

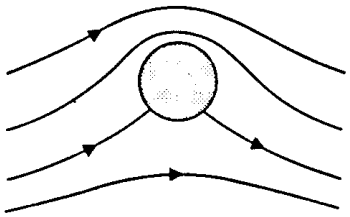
Rozważmy przypadki:

1. $B = 0$ (czyli $\Gamma = 0$). Przepływy nad i pod cylindrem są symetryczne. Na powierzchni cylindra znika składowa radialna a składowa transwersalna znika na froncie $\varphi = \pi$. Następnie rośnie gdy kąt φ maleje (nad cylindrem, lub rośnie pod cylindrem) (ciecz "ślizga się" po powierzchni cylindra) do maksymalnej wartości dla $\varphi = \frac{\pi}{2}$ nad (odpowiednio $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ pod) a potem znów maleje do zera. Mamy zatem dwa punkty stagnacji (w których wektor prędkości znika) przed i za na powierzchni cylindra.

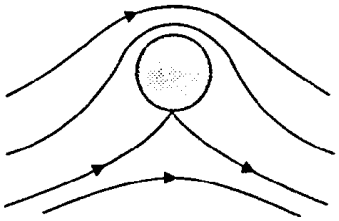


Rysunek **4.3.** *Opływ w przypadku braku cyrkulacji* $\Gamma = 0$.

2. $B \neq 0$. Charakter przepływu zależy od wartości parametru $B = -\dfrac{\Gamma}{2\pi u a}$. Uwidacznia się to najlepiej przy analizie położenia punktów stagnacji. Składowa radialna znika gdy $r = a$ lub $\cos\varphi = 0$
   a) Na powierzchni cylindra $r = a$, składowa transwersalna na tej powierzchni znika w punktach $(1+1)\sin\varphi + B = 0$ czyli $\sin\varphi = -\frac{B}{2}$ co jest możliwe tylko gdy $0 < |B| \leqslant 2$.



Rysunek **4.4.** *Opływ w przypadku* $0 < B < 2$ *czyli cyrkulacji* $0 < |\Gamma| < 4\pi u a$.



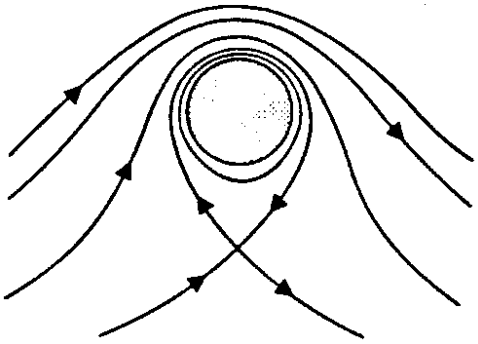
Rysunek **4.5.** *Opływ w przypadku* $B = 2$ *czyli cyrkulacji* $|\Gamma| = 4\pi u a$.

   b) Przypadek drugi $\cos\varphi = 0$, czyli $\sin\varphi = \pm 1$. Znikanie składowej transwersalnej prowadzi do równania kwadratowego w $\frac{a}{r}$

$$\pm\left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right] + B\frac{a}{r} = 0 \quad \text{z wyróżnikiem } \Delta = B^2 - 4.$$

   Dla $\sin\varphi = 1$ równanie nie ma dodatnich rozwiązań. Dla $\sin\varphi = -1$ czyli $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ oraz $B > 2$ istnieje jeden punkt stagnacji leżący poza powierzchnią cylindra $\frac{a}{r} < 1$

$$\frac{a}{r} = \frac{B}{2} - \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - 1}\,, \qquad \varphi = \frac{3\pi}{2}$$



Rysunek **4.6.** *Opływ w przypadku* $B > 2$ *czyli cyrkulacji* $|\Gamma| > 4\pi u a$. *Gdy rośnie wartość parametru* B *rośnie również odległość punktu stagnacji od powierzchni cylindra. Powiększa się wtedy obszar bezpośrednio przyległy do cylindra w którym ciecz okrąża cylinder.*

Wyznaczenie siły. Siła jaką ciecz oddziaływuje na cylinder może być wyznaczona na podstawie rozkładu ciśnienia na powierzchni $r = a$. Z twierdzenia Bernoulliego wyznaczymy rozkład

ciśnienia. Po pierwsze zauważmy, że $r = a$ jest linią prądu. Dla przepływu ustalonego wzdłuż linii prądu (toru ruchu) (porównaj twierdzenie 3.2)

$$\frac{1}{\varrho}p + \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2 = const$$

Siła z jaką na jednostkę długości cylindra działa ciecz

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= \oint_{\text{cylinder}}(-p)\boldsymbol{n}ds = -\int_0^{2\pi}\left\{const - \frac{1}{2}\varrho u^2\left[2\sin\varphi + B\right]^2\right\}\boldsymbol{n}\,ad\varphi \\ &= -\int_0^{2\pi}\left\{const - \frac{1}{2}\varrho u^2\left(4\sin^2\varphi + 4B\sin\varphi\right)\right\}\boldsymbol{n}\,ad\varphi\end{aligned}$$

Wektor normalny do powierzchni cylindra ma we współrzędnych kartezjańskich $0xyz$ postać $\begin{bmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{bmatrix}$ (pomijamy z-ową współrzędną równą zero) zatem

$$\boldsymbol{F} = -const\int_0^{2\pi}\begin{bmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{bmatrix}d\varphi + 2\varrho u^2 a\int_0^{2\pi}\begin{bmatrix}\sin^2\varphi\cos\varphi \\ \sin^2\varphi\sin\varphi\end{bmatrix}d\varphi + 2\varrho B u^2 a\int_0^{2\pi}\begin{bmatrix}\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin^2\varphi\end{bmatrix}ad\varphi$$

Jedyna niezerowa całka spośród powyższych to $\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi = \pi$ zatem

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix}0 \\ 2\varrho B u^2 a\pi\end{bmatrix}$$

Oznacza to istnienie siły skierowanej pionowo (nośnej) której wartość $|\boldsymbol{F}| = \varrho u\,|\Gamma|$ zależy od szybkości i jej krążenia z jaką napływa ciecz.

Ten prosty związek pozostaje prawdziwy nie tylko w przypadku opływu walca ale również w bardziej ogólnych przypadkach. Porównaj dodatek 4.4. ♠

4.3.3. Fale akustyczne.

Równania akustyki. Zastosujmy równania hydrodynamiki do zjawiska rozchodzenia się dźwięku. Zakładać będziemy, że

— możemy zaniedbać siły zewnętrzne,

— równaniem stanu jest adiabata

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\kappa},$$

— zmiany płynu są małe tak, że można zaniedbać wyższe potęgi prędkości, gradientów prędkości i gęstości (przybliżenie liniowe).

Przy tych założeniach równania hydrodynamiki (3.15) przyjmują postać

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho_0}\mathtt{grad}\,p \tag{4.19a}$$

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \varrho_0\,\mathtt{div}\boldsymbol{v} = 0 \tag{4.19b}$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\kappa} \tag{4.19c}$$

Z równania (4.19c) wynika w tym przybliżeniu

$$\mathtt{grad}\,p = \left[\frac{dp}{d\varrho}\right]_{\varrho_0}\mathtt{grad}\,\varrho = c^2\mathtt{grad}\,\varrho$$

gdzie dodatnią stałą $\left[\frac{dp}{d\varrho}\right]_{\varrho_0} = \kappa\frac{p_0}{\varrho_0}$ oznaczyliśmy c^2. Podstawiając do (4.19a) otrzymujemy

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{c^2}{\varrho_0}\mathtt{grad}\,\varrho \tag{4.20}$$

Weźmy diwergencję obu stron (4.20) [$\mathtt{div}\,\mathtt{grad} \equiv \nabla^2$] oraz zróżniczkujmy (4.19b) względem t. Po wyeliminowaniu prędkości $\boldsymbol{v}$ otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2} - c^2\nabla^2\varrho = 0 \tag{4.21}$$

Zmiany gęstości są opisane równaniem falowym.

Odpowiednio rozważmy teraz równanie ciągłości (4.19b) i zastąpmy w nim $\dfrac{\partial \varrho}{\partial t}$ przez

$$\left[\frac{\partial \varrho}{\partial p}\right]_{p_0}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t}$$

otrzymujemy

$$\varrho_0\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\mathtt{grad}\,p \tag{4.22a}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \varrho_0\,\mathtt{div}\boldsymbol{v} = 0 \tag{4.22b}$$

Analogicznie biorąc dywergencję pierwszego a drugie różniczkując po t i odejmując od pierwszego otrzymujemy

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\,\mathtt{div}\,(\mathtt{grad}\,p)\,.$$

Na koniec wprowadzimy *potencjał pola prędkości* i pokażemy, że spełnia to samo równanie falowe.

4.4. Dodatek. Elementy teorii aerodynamiki.

Acheson (Elementary Fluid Dynamics) rozpoczyna rozdział o aerodynamice od zestawienia wydarzeń z wczesnej historii aerodynamiki, które tutaj przytoczymy.

— 1894 Na spotkaniu Towarzystwa Naukowego w Birmingham F.W. Lanchester przedstawia wystąpienie: "*Unoszenie ptaków i możliwość lotów mechanicznych*"

— 1897 Lanchester wysyła do Towarzystwa Fizycznego artkuł zawierający pisemną wersję jego wystąpienia lecz zostaje on odrzucony.

— 1901 Bracia Wright podejmują pierwszą, choć nieudaną próbę lotu. (Podobno jeden z nich był tak rozczarowany, że szeptał "nikt nie będzie latał jeszcze przez tysiąc lat")

— 1902 Kutta opublikował krótki artykuł "*Siła nośna w przepływającym płynie*". Rozpoznał on, choć nie w ogólności, związek pomiędzy cyrkulacją a unoszeniem.

— 1903 (17 grudnia) Braciom Wright udał się pierwszy lot. Trwał on 12 sekund, ale jeszcze tego samego dnia udało się go wydłużyć.

— 1904 Prandtl ...

— 1906 Żukowski opublikował twierdzenie o unoszeniu **??**:
Jeżeli bezwirowy, dwuwymiarowy strumień opływa zamknięty kontur na którym cyrkulacja prędkości wynosi Γ*, na kontur działa siła nośna, prostopadła do prędkości, której ciśnienie wynosi*

$$L = \varrho_\infty v_\infty \Gamma$$

gdzie v_∞ *jest prędkością płynu napływającego z nieskończoności.*

4.4.1. Potencjał prędkości i funkcja prądu.

W tym paragrafie rozważać będziemy 2D przepływ bezwirowy cieczy nieściśliwej.

Potencjał prędkości

Warunkiem istnienia potencjału prędkości Φ jest znikanie rotacji prędkości $\texttt{rot}\ \boldsymbol{v} = 0$ w każdym punkcie obszaru. Wartość potencjału w punkcie p jest określona przez

$$\Phi = \int_O^p \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{\ell} \tag{4.23}$$

gdzie O jest dowolnym ustalonym punktem. W obszarze jednospójnym[3], w którym znika rotacja prędkości Φ nie zależy od drogi łączącej punkty O i p i tym sposobem jest dobrze określoną funkcją położenia punktu p.

Zadanie 4.6. Pokazać, że w obszarze jednospójnym (w którym wszystkie krzywe zamknięte są równoważne - porównaj stopkę) całka (4.23) dla bezwirowego ruchu płynu nie zależy od wyboru krzywej łączącej punkty O i p. ■

Zróżniczkowanie całkowej definicji potencjału prędkości (4.23) prowadzi do

$$\boldsymbol{v} = \nabla\Phi. \tag{4.24}$$

Ta równość może być traktowana jako różniczkowa definicja potencjału.

[3] Precyzyjną definicję można znaleźć w podręcznikach analizy w rozdziałach o topologii. Obrazowo chodzi o to, że w obszarze nie ma dziur (wysp) czyli każda pętla może być ściągnięta do punktu. W takim obszarze wszystkie krzywe zamknięte są równoważne tzn. mogą być w sposób ciągły przeprowadzone jedna w drugą. Przykładem obszaru jednospójnego jest na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ wnętrze koła o promieniu R_0 Wszystkie krzywe zamknięte mogą być ściągnięte do punktu. Natomiast gdy wytniemy z niego mniejsze koło czyli rozważając pierścień $r_0 < r < R_0$ otrzymamy obszar nie jednospójny. Te krzywe zamknięte, które okrążają wewnętrzne koło nie mogą być ściągnięte do punktu. Każdej krzywej zamkniętej możemy przypisać liczbę okrążeń ("nawinięć") κ wewnętrznej dziury. Tylko krzywe o tej samej wartości κ mogą być w sposób ciągły przeprowadzone jedna w drugą.

⋮

`Przykady.`

1. $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} U \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ to $\Phi = U\,x_1$
2. $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ -\alpha x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ to $\Phi = \frac{1}{2}\alpha\left(x_1^2 - x_2^2\right).$

   W obu powyższych przykładach Φ jest jednoznaczną funkcją
3.

Funkcja prądu

Niezwykle użytecznym pojęciem w przypadku ruchu dwuwymiarowego cieczy nieściśliwej jest funkcja prądu Ψ. Definiujemy ją następująco: szukamy ogólnego rozwiązania równania ciągłości cieczy nieściśliwej w 2D

$$\mathtt{div}\boldsymbol{v} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0.$$

Jest nim prędkość postaci[4]

$$v_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}, \qquad v_2 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \tag{4.25}$$

Co wynika z równości drugich pochodnych $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2 \partial x_1}$.

Zadanie 4.7. Pokazać, że w obszarze jednospójnym (patrz zadanie 4.6) całka

$$\Psi = \int_0^p v_1 dx_1 - v_2 dx_2$$

dla nieściśliwego płynu nie zależy od wyboru krzywej łączącej punkty O i p. Służy zatem za definicję funkcji prądu. ■

Funkcja prądu ma następujące własności:

1. Krzywe o równaniu $\Psi = const$ są styczne do pola prędkości $\boldsymbol{v}$ bowiem $\mathtt{grad}\Psi \cdot \boldsymbol{v} = 0$ (czyli $\mathtt{grad}\Psi \perp \boldsymbol{v}$). Krzywe $\Psi = const$ są liniami prądu - krzywymi całkowymi pola prędkości w ustalonej chwili czasu.
2. Rysując rodzinę linii prądu (dla wartości Ψ różniących się o stałą wartość) otrzymujemy pewne wyobrażenie o polu prędkości: długość $|\mathtt{grad}\Psi| = |\boldsymbol{v}|$ zatem prędkość jest większa tam gdzie linie są blisko siebie a mniejsza gdzie są oddalone.

---

[4] Jest to 2D przypadek ogólnego faktu w 3D. Jeżeli pole jest bezźródłowe $\mathtt{div}\boldsymbol{v} = 0$ to jest solenoidalne tzn. $\boldsymbol{v} = \mathtt{rot}\boldsymbol{A}$. W rozważanym przypadku 2D należy wziąć

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Psi \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathtt{rot}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

To przedstawienie i wzór (2.22c) pozwala znaleźć związek między funkcją prądu a składowymi prędkości w układzie cylindrycznym

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}, \qquad v_\varphi = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}.$$

3. Niech dane będą dwa punkty $\boldsymbol{x}$ i $\tilde{\boldsymbol{x}}$ połączone krzywą L wzdłuż której infinitezymalny element liniowy $d\boldsymbol{\ell} = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix}$. Różnica wartości funkcji prądu w tych punktach może być przedstawiona jako całka wzdłuż krzywej L

$$\begin{aligned} \Psi(\tilde{\boldsymbol{x}}) - \Psi(\boldsymbol{x}) &= \int_{\boldsymbol{x}}^{\tilde{\boldsymbol{x}}} d\Psi = \int_{\boldsymbol{x}}^{\tilde{\boldsymbol{x}}} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} dx_2 \right) \\ &= \int_{\boldsymbol{x}}^{\tilde{\boldsymbol{x}}} (-v_2 dx_1 + v_1 dx_2) \\ &= \int_{\boldsymbol{x}}^{\tilde{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} ds\,, \qquad \boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2}} \begin{bmatrix} dx_2 \\ -dx_1 \end{bmatrix} \perp d\boldsymbol{\ell} \end{aligned}$$

gdzie $ds = |d\boldsymbol{\ell}| = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2}$. Otrzymany wynik ma klarowną interpretację gdy weźmiemy pod uwagę jeszcze trzeci wymiar prostopadły do powierzchni $0x_1x_2$. Wtedy wielkość $\int_{\boldsymbol{x}}^{\tilde{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} ds$ jest strumieniem masy na jednostkową długość w kierunku x_3. Powyższy rachunek pokazuje ponadto, że całka nie zależy od wyboru krzywej L (zależy tylko od punktów końcowych $\boldsymbol{x}$ i $\tilde{\boldsymbol{x}}$.

Potencjał zespolony. Rozważmy 2D przepływ bezwirowy cieczy nieściśliwej. Oznacza to, że pole prędkości możemy przedstawić jednocześnie przy pomocy potencjału i funkcji prądu

$$v_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}\,, \qquad v_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}. \tag{4.26}$$

Drugie równości, w każdej z powyższych par, możemy zinterpretować jako, dobrze znane z analizy zespolonej równania Cauchy'ego-Riemanna. Pod warunkiem, że wszystkie pochodne cząstkowe są ciągłe oznacza to, że funkcja zespolona

$$W = \Phi(x_1, x_2) + i\Psi(x_1, x_2) \tag{4.27}$$

jest funkcją holomorficzną zmiennej zespolonej $z = x_1 + ix_2$. Funkcję $W(z)$ nazywamy *potencjałem zespolonym*. Składowe prędkości związane są z jej pochodną

$$\frac{dW}{dz} = \frac{d\Phi}{dx_1} + i\frac{d\Psi}{dx_1} = v_1 - iv_2 \tag{4.28}$$

`Przykład. 2D bezwirowy przepływ w pobliżu punktu stagnacji.`

Jeżeli $W(z)$ jest funkcją holomorficzną w pewnym otoczeniu U punktu z_0 to możemy rozwinąć ją w szereg Taylora

$$W(z) = W(z_0) + (z - z_0)W'(z_0) + \frac{1}{2}(z - z_0)^2 W''(z_0) + \dots$$

Stała wartość $W(z_0)$ nie ma wpływu na pochodną i można ją odjąć stronami w powyższym rozwinięciu. Gdy przyjmiemy, że punktem stagnacji jest z_0 to $W'(z_0) = 0$ bowiem z (4.28) szybkość $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \left|\frac{dW}{dz}\right|$. W bezpośrednim sąsiedztwie punku stagnacji pole prędkości jest określone przez wyraz kwadratowy. Druga pochodna $W''(z_0)$, w ogólności (w arbitralnie wybranym układzie współrzędnych $0x_1x_2$), jest liczbą zespoloną $\alpha e^{i\beta}$ gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Przesuwając początek układu współrzędnych do punktu stagnacji $\hat{z} = z - z_0$, a następnie obracając o kąt $\beta/2$ tzn $\tilde{z} = \hat{z}e^{1\frac{\beta}{2}}$ możemy w liniowym przybliżeniu zapisać

$$W(\tilde{z}) - W(0) = \frac{1}{2}\alpha\tilde{z}^2\,, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Opuszczając znak ˜, ale rozumiejąc, że układ współrzędnych jest dobrany odpowiednio otrzymujemy $z = x_1 + ix_2$, stąd $W(z) - W(0) = \frac{1}{2}\alpha\left[x_1^2 - x_2 + 2ix_1x_2\right]$ czyli

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ -\alpha x_2 \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

Funkcją prądu jest $\Psi(x_1, x_2) = \alpha x_1 x_2$ czyli krzywymi całkowymi pola prędkości są hiperbole. ♣

4.4.2. Odwzorowania konforemne

Mając dany opływ cylindra z krążeniem we współrzędnej z pytamy o odwzorowanie holomorficzne takie aby we współrzędnej Z ppłyn opływał ciało o kształcie bardziej przypominający skrzydło.

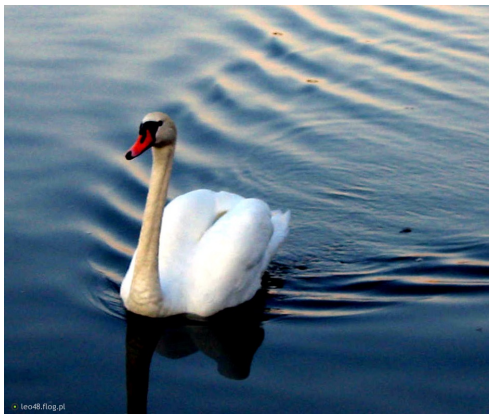
Rozdział 5

Przepływy z powierzchnią swobodną. Fale

Przepływy z powierzchnią swobodną są spotykane wszędzie wokoło nas. Jako przykłady wymienić można fale na wodzie, przepływ rzeki, w tym opływanie przeszkód, a z bardziej egzotycznych: pływy oceanów, spiętrzenia wody w czasie sztormów, tsunami.

W tym rozdziale rozpatrzymy tylko pewne aspekty zjawisk, główną uwagę poświęcając na analizę prędkości poruszania się fal. Przykładowo gdy na skutek trzęsienia ziemi w pobliżu Japonii (po jednej stronie Oceanu Spokojnego) wzbudzona została fala pływowa, dość łatwo można oszacować po jakim czasie dotrze ona do brzegów Kalifornii czy południowego Chile. Pokażemy, że takie fale przemieszczają się z prędkością około 200 m/s, czyli czas dotarcia do Kalifornii to około pół dnia, a jeden dzień do Chile - mniej więcej tyle samo co podróż samolotem pasażerskim.

Kluczowym zjawiskiem rządzącym rozchodzeniem się fal, odpowiedzialnym m.in. za skomplikowany układ fal z tyłu za poruszającym się obiektem,



Rysunek 5.1. *Ślad torowy (kilwater) - stacjonarny układ fal z tyłu poruszjącego się obiektu.*

Rysunek 5.2. *Układ fal opływających preszkodę (np. spławik wędkarski).*

czy też opływu spławika, jest zjawisko dyspersji (ang. disperse - *rozproszyć*). Fale na powierzchni swobodnej o różnej długości fali rozchodzą się z różną prędkością. W dalszej części pokażemy na przykład, że składowa fourierowska

$$A\cos(kx - \omega t)$$

przemieszcza się z prędkością

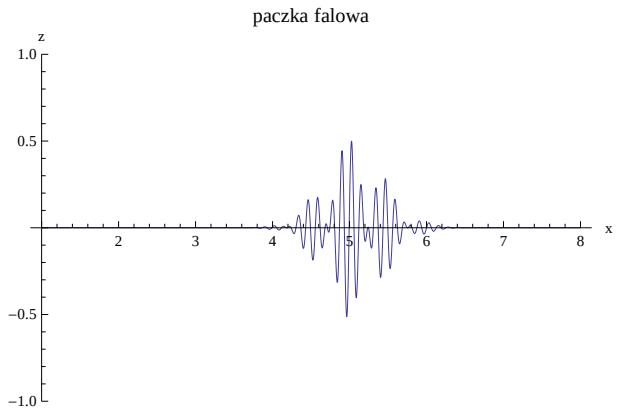
$$c\{=\frac{\omega}{k}\} = \sqrt{\frac{g}{k}}, \quad (g - \text{ przyspieszenie ziemskie}). \tag{5.1}$$

Wynika stąd, że fale o większej długości $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$ wędrują szybciej. Jest to sytuacja zupełnie inna niż w przypadku fal wzdłuż drgającej struny, gdzie prędkość fali c niezależnie od jej długości jesst określona przez naciąg struny i masę struny na jednostkę długości $c = \sqrt{\dfrac{T}{\varrho}}$.

Podczas gdy indywidualne grzbiety fal przemieszczają się z prędkością c, prędkość przemieszczania się grupy fal (paczki falowej) jako całości wyraża się przez tzw. *prędkość grupową*[1]

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} \tag{5.2}$$

Zgodnie z (5.1) $\omega = \sqrt{gk}$, zatem prędkość grupowa $c_g = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}c$. Oznacza to, że w tym modelu (fal na głębokiej wodzie) indywidualne grzbiety falowe poruszają się dwa razy szybciej niż grupa jako całość



Rysunek **5.3.** *Grupa fal na głębokiej wodzie.*

Z tego powodu widzimy ciągle pojawiające się nowe grzbiety z tyłu grupy i znikające na jej froncie.

5.1. Układ równań różniczkowych.

We wszystkich wspomnianych wyżej przykładowych przepływach kształt powierzchni swobodnej, a precyzyjniej oddziaływanie woda-powietrze na powierzchni rozgraniczającej jest najważniejszą częścia dynamiki przepływu. Bezwładność wody jest około 10^3 razy większa niż powietrza, dlatego z dobrym przybliżeniem[2] przyjmować będziemy, że na powierzchni wody ciśnienie jest stałe

$$p_{\text{na powierzchni swobodnej}} = p_{atm} = const. \tag{5.3}$$

Rozważać będziemy przepływy w obecności jednorodnego pola grawitacyjnego tzn. $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g} = -\mathtt{grad}\,(gx_3)$, $g = const.$

Ograniczymy się do przepływów, które zostały wygenerowane ze stanu spoczynku. Na mocy wniosku z twierdzenia Kelwina (o zachowaniu krążenia) wynika, że będą to przepływy bezwirowe czyli potencjalne $\boldsymbol{v} = \mathtt{grad}\,\Phi$. Dla cieczy nieściśliwej prowadzi to do równania Laplace'a na potencjał

$$\mathtt{div}\,\boldsymbol{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2\Phi = 0$$

Dynamika przepływu zawarta jest w tym równaniu i warunkach brzegowych. Na powierzchni swobodnej mamy dwa warunki

— warunek na ciśnienie (5.3)

— warunek kinematyczny

[1] Porównaj uzupełnienia na końcu rozdziału.

[2] Przedstawiony tutaj warunek (5.3) nie może być stosowany w przypadkach gdy fale generowane są przez wiatry wiejące nad powierzchnią wody.

Przypomnijmy sobie prawo Bernoulliego w formie dla bezwirowego pola prędkości ($\mathtt{rot}\,\boldsymbol{v} = 0$) zależnego od czasu. Kładziemy $V = gx_3$, $\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2 = \frac{1}{2}|\mathtt{grad}\,\Phi|^2$ i stwierdzamy, że wielkość

$$\tilde{\Psi}(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\mathtt{grad}\,\Phi|^2 + \frac{1}{\varrho}p + gx_3 \tag{5.4}$$

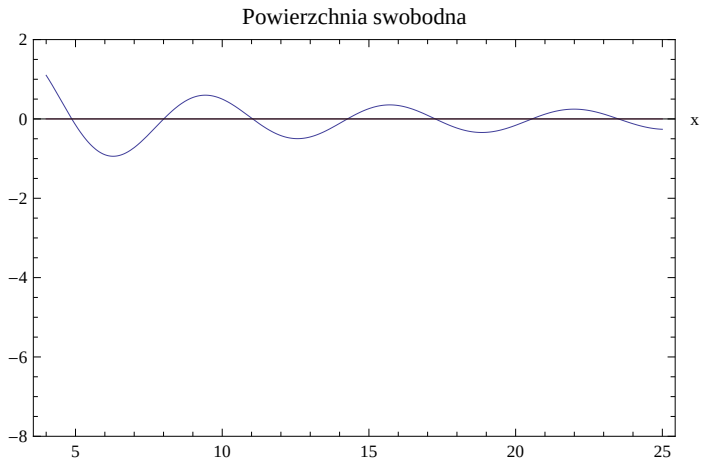
jest jedynie funkcją czasu (nie zależy od położenia). Liczbowa wartość $\tilde{\Psi}(t)$ jest umowna bowiem fizycznie mierzalna prędkość $\boldsymbol{v} = \mathtt{grad}\,\Phi$, mamy zatem swobodę cechowania potencjału prędkości [Φ oraz $\Phi + \phi(t)$ dają ten sam gradient.]

Na powierzchni swobodnej $x_3 = \xi(x,t)$, ciśnienie $p = p_{atm}$ i (5.4) możemy zapisać

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\mathtt{grad}\,\Phi|^2 + g\xi = f(t) \quad \text{dla} \quad x_3 = \xi(x,t) \tag{5.5}$$

gdzie $f(t) = \tilde{\Psi}(t) - \frac{1}{\varrho}p_{atm}$.

Podsumowując matematyczny opis potencjlnego przepływu nieściśliwej warstwy wody o głębokości h (w stanie niezaburzonym) w kierunku osi $0x_1$



Rysunek 5.4. *Przepływ dwuwymiarowy. Zakładamy, że wszystkie wielkości nie zależą od x_2.*

Równanie naczelne (równanie różniczkowe na potencjał prędkości - dla cieczy nieściśliwej $\mathtt{div}\,\boldsymbol{v} = 0$)

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad \text{w warstwie} \quad -h \leqslant x_3 \leqslant \xi(x_1,t) \tag{5.6a}$$

Powierzchnia $x_3 = -h$ jest nieprznikalna (znika na niej składowa normalna prędkości)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = 0 \quad \text{dla} \quad x_3 = -h \tag{5.6b}$$

Warunek kinematyczny na powierzchni swobodnej (cząstki cieczy na powierzchni swobodnej cały czas pozostają na niej (porównaj §3.6))

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\frac{\partial \xi}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = 0 \quad \text{dla} \quad x_3 = \xi(x_1,t) \tag{5.6c}$$

Prawo Bernoulliego

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\mathtt{grad}\,\Phi|^2 + g\xi = f(t) \quad \text{dla} \quad x_3 = \xi(x,t) \tag{5.6d}$$

Uwagi.

— Rozpatrujemy zagadnienie bez warunków brzegowych względem zmiennej x_1 czyli przyjmujemy, że fale rozchodzą się wzdłuż całej osi $0x_1$. Pozwoli to m.in. znaleźć obraz fourierowski.

— W ostatnim równaniu (5.6d) bez straty ogólności możemy położyć $f(t) \equiv 0$ oznacza to bowiem dodanie do potencjału Φ składnika $\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)\, d\tau$, który jako niezależny od zmiennych przestrzennych nie zmienia gradientu Φ.
— Jak widać otrzymany model jest nieliniowy. Komplikuje to mocno poszukiwanie rozwiązań, nie obowiązuje bowiem w takim przypadku zasada superpozycji.
— Dokonajmy uproszczenia m.in. poprzez linearyzację i przejście do układu równań o stałych współczynnikach. Pozwoli to stosować całą maszynerię transformaty Fouriera.

1. Pomijamy wyrazy nieliniowe $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1}\dfrac{\partial \xi}{\partial x_1}$ oraz $\frac{1}{2}|\mathtt{grad}\,\Phi|^2$,
2. W warunku brzegowym na powierzchni $x_3 = 0 + \xi$ rozwijając w szereg Taylora wyrazimy wszystkie poszukiwane wielkości poprzez wartości na powierzchni $x_3 = 0$. Przykładowo

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right|_{x_3=\xi} = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right|_{x_3=0} + \xi \left.\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right|_{x_3=0} + \dots$$

ostatni wyraz po prawej stronie znów pominiemy jako kwadratowy.

Zlinearyzowane równania i warunki brzegowe

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad \text{w warstwie} \quad -h \leqslant x_3 \leqslant 0 \tag{5.7a}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = 0 \quad \text{dla} \quad x_3 = -h \tag{5.7b}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = 0 \quad \text{dla} \quad x_3 = 0 \tag{5.7c}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + +g\xi = 0 \quad \text{dla} \quad x_3 = 0 \tag{5.7d}$$

Dokonajmy transformaty Fouriera

$$\hat{\Phi}(k, x_3, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x_1, x_3, t) e^{-ikx_1} dx_1$$

$$\hat{\xi}(k, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \xi(x_1, t) e^{-ikx_1} dx_1$$

po jej zastosowaniu do równań (5.7a- 5.7d) otrzymamy

$$-k^2\hat{\Phi} + \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial x_3^2} = 0 \quad \text{w warstwie} \quad -h \leqslant x_3 \leqslant 0 \tag{5.8a}$$

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x_3} = 0 \quad \text{dla} \quad x_3 = -h \tag{5.8b}$$

$$\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x_3} = 0 \quad \text{dla} \quad x_3 = 0 \tag{5.8c}$$

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} + g\hat{\xi} = 0 \quad \text{dla} \quad x_3 = 0 \tag{5.8d}$$

Rozwiązaniem pierwszego równania (5.8a) jest

$$\hat{\Phi} = A(k, t)e^{kx_3} + B(k, t)e^{-kx_3}.$$

Podstawiając do (5.8b)

$$0 = \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x_3}|_{x_3=-h} = kAe^{kh}\left(e^{-2kh} - \frac{B}{A}\right)$$

czyli $B = Ae^{-2kh}$ zatem $\hat{\Phi} = Ae^{-kh}\left[e^{k(x_3+h)} + e^{-k(x_3+h)}\right]$. Oznaczając $Ae^{-kh} = \frac{1}{2}a$ otrzymujemy

$$\hat{\Phi} = a\,\cosh[k(x_3+h)] \quad \text{gdzie } a = a(k,t) \tag{5.9}$$

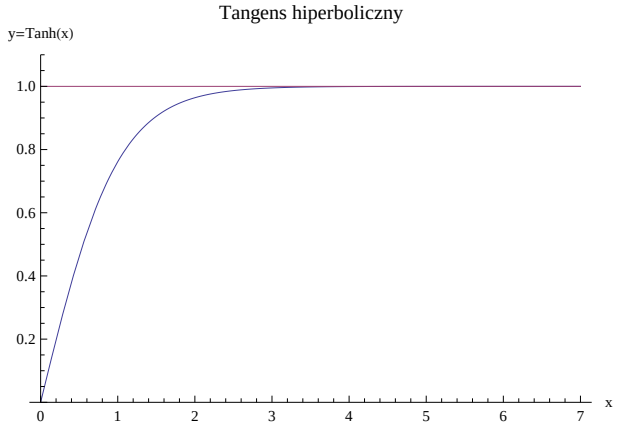
Aby znaleźć zależność a od czasu zróżniczkujmy (5.8d) po t i odejmijmy od niego (5.8c). Otrzymamy

$$\frac{\partial^2\hat{\Phi}}{\partial t^2} + g\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial x_3} = 0 \quad \text{dla } x_3 = 0$$

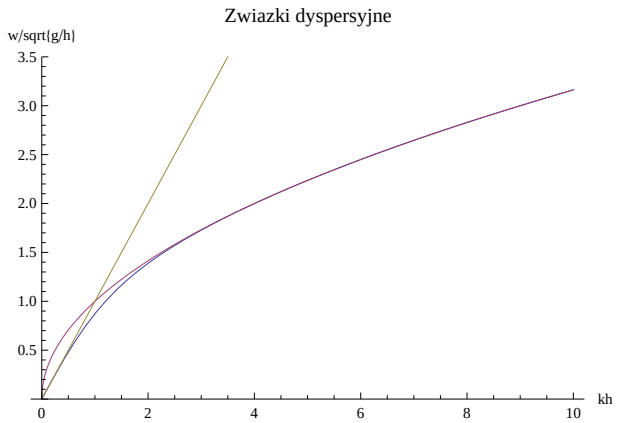
Podstawiając (5.9) dostajemy

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}\cosh[kh] + gka\sinh[kh] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + \left(gk\frac{\sinh[kh]}{\cosh[kh]}\right)a = 0$$

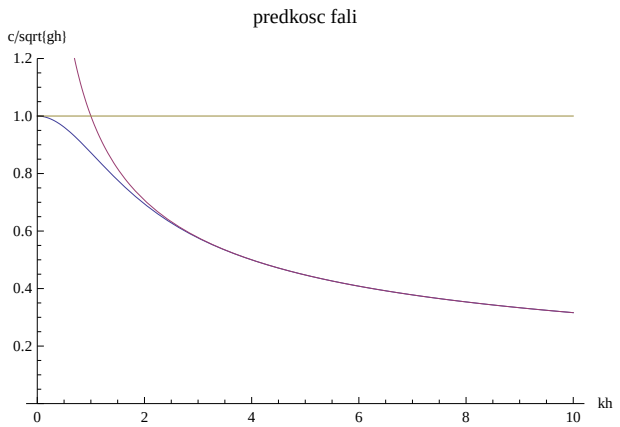
czyli równanie drgań harmonicznych $a \sim e^{i\omega t}$ z częstością własną $\omega^2 = gk\tanh[kh]$.



`Wykres` *Tangens hiperboliczny dąży wykładniczo do 1. Dla argumentu π przyjmuje wartość* $\texttt{tahh}(\pi) \approx 0,9963$ *czyli* ≈ 1 *z błędem poniżej* 0.5%.



`Wykres` *Związek łączący częstość ω i liczbę falową k nazywa się* `związkiem dyspersyjnym`. *Niebieska linia na wykresie przedstawia ścisłą zależność* $\omega\sqrt{\frac{h}{g}} = \sqrt{kh\texttt{tanh}(kh)}$, *różowa przybliżenie "głębokiej wody"* $\omega\sqrt{\frac{h}{g}} = \sqrt{kh}$, *żółta przybliżenie "płytkiej wody" lub inaczej długich fal* $\omega\sqrt{\frac{h}{g}} = kh$.



Przypadki szczególne:

1. Przypadek **głębokiej wody**. Gdy $kh \gg 1$ tzn. długość fal $\lambda \ll 2\pi h$ (fale krótkie) pozwalają dokonać przybliżenia $\texttt{tanh}(kh) \approx 1$ czyli $\omega = \sqrt{gk}$ oraz $c = \sqrt{\frac{g}{k}}$.
   Dobry model dla fal podróżujących poprzez ocean, z dala od brzegu. Przeciętna głębokość oceanu z dala od kontynentów wynosi 5 km a typowy okres drgań ok. 15 s czyli $\omega = \frac{2\pi}{15s} \simeq 0,4$ Hz. Ze związku dyspersyjnego $k^{-1} = \frac{g}{\omega^2} \simeq 63$ m, rzeczywiście 63 m$\ll$ 5 km. Prędkość takiej fali to około $c \simeq 25\, ms^{-1}$.
   Badania geofizyczne[3] prowadzone w latach 60-tych XXw. polegające na obserwacji fal generowanych przez sztormy pomiędzy Tasmanią a Antarktydą i rozchodzących się na północ Pacyfiku aż do Alaski potwierdziły te przewidywania. A przecież nie jest takie oczywiste, że przyjęte założenia modelu m.in. bezwirowość i linearyzacja, nie będą źródłem nakładających się z biegiem błędów, szczególnie na długich dystansach.
2. Przypadek **płytkiej wody** (długich fal $\frac{\lambda}{2\pi} \gg h$) Wtedy $\texttt{tanh}(kh) \approx kh$ stąd $\omega = \sqrt{gk^2h}$ czyli $c = \sqrt{gh}$.
   Zauważmy na wykresie prędkości, że c rośnie monotonicznie do swojej maksymalne wartości $\sqrt{gh}$ gdy $kh \to 0$ Najdłuższe fale są najszybsze.
   — W przypadku oceanu $c \simeq \sqrt{10ms^{-2}\, 5\, 10^3 m} \simeq 224ms^{-1} \approx 800km/h$.
   — Fale powodziowe na rzece n.p. $h = 2m$ to $c \simeq 4,5m/s \approx 16km/h$.

5.2. Tory cząstek.

Powtórzmy rozważania poprzedniego paragrafu dla fali sinusoidalnej określonej długości $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, tzn. szukamy rozwiązania zlinearyzowanego układu (5.7a-5.7d) postaci

$$\xi(x_1, t) = \texttt{Re}\left\{\hat{\xi} e^{i(kx-\omega t)}\right\}, \qquad \phi(x_1, x_3, t) = \texttt{Re}\left\{\hat{\phi}(x_3) e^{i(kx-\omega t)}\right\} \tag{5.10}$$

Po podstawieniu otrzymujemy

$$-k^2\hat{\phi} + \frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial x_3^2} = 0 \quad \text{w warstwie} \quad -h \leqslant x_3 \leqslant 0 \tag{5.11a}$$

$$\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x_3} = 0 \quad \text{dla} \quad x_3 = -h \tag{5.11b}$$

$$i\omega\hat{\xi} + \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x_3} = 0 \quad \text{dla} \quad x_3 = 0 \tag{5.11c}$$

$$-i\omega\hat{\phi} + g\hat{\xi} = 0 \quad \text{dla} \quad x_3 = 0 \tag{5.11d}$$

[3] F.E. Snodgrass, G.W. Groves, K.F. Hasselmann, G.R. Miller, W.H. Munk, W.H. Powers, *Propagation of ocean swell across Pacific*, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. **A 259**, 431-497 (1966)

Rozwiązaniem (5.11a) spełniającym warunek (5.11b) jest

$$\hat{\phi} = A\mathtt{cosh}[k(x_3 + h)]$$

Wtedy pozostałe dwa równania (5.11c, 5.11d) dają

$$\begin{aligned} i\omega\hat{\xi} + kA\mathtt{sinh}(kh) &= 0 \\ g\hat{\xi} - i\omega A\mathtt{cosh}(kh) &= 0 \end{aligned}$$

Potraktujmy je jako dwa równania liniowe na niewiadome amplitudy $\hat{\xi}$, A. Ten układ równań posiada niezerowe rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy (gddy) wyznacznik główny układu jest równy zero

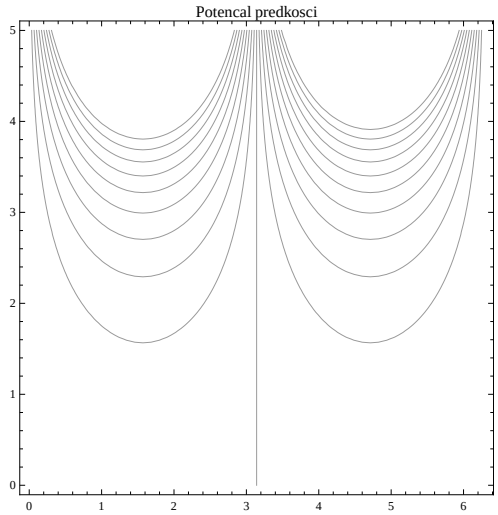
$$\begin{vmatrix} i\omega & k\mathtt{cosh}(kh) \\ g & -i\omega\mathtt{cosh}(kh) \end{vmatrix} = 0$$

tzn. gddy $\omega^2 = gk\mathtt{tanh}(kh)$. Wyliczając A z pierwszego równania otrzymamy $A = \dfrac{-i\omega\hat{\xi}}{k\mathtt{sinh}(kh)}$ czyli

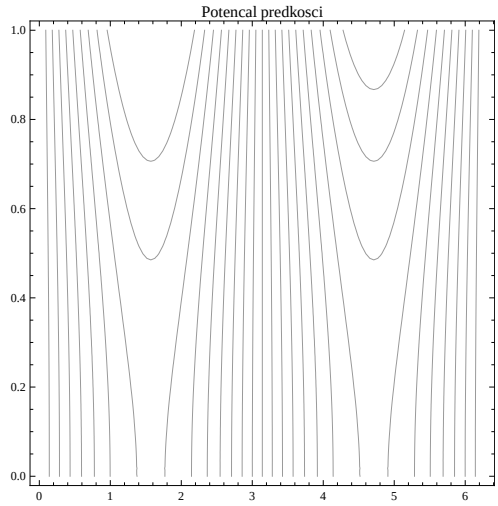
$$\Phi(x_1, x_3, t) = \mathtt{Re}\left\{\frac{-i\omega\hat{\xi}}{k\mathtt{sinh}(kh)} e^{i(kx-\omega t)}\mathtt{cosh}[k(x_3 + h)]\right\} \tag{5.12}$$

Potencjał (5.12) wyznacza prędkość $\boldsymbol{v} = \mathtt{grad}\Phi$

$$\boldsymbol{v} = \mathtt{Re}\left\{\frac{\omega\hat{\xi}}{\mathtt{sinh}(kh)} e^{i(kx-\omega t)} \begin{bmatrix} \mathtt{cosh}[k(x_3 + h)] \\ -i\mathtt{sinh}[k(x_3 + h)] \end{bmatrix}\right\} \tag{5.13}$$

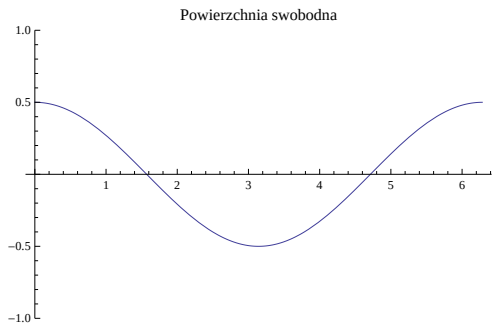


Rysunek **5.5.** *Linie ekwipotencjalne w ustalonej chwili czasu $\omega t = 2\pi$, w modelu głębokiej wody.*



Rysunek **5.6.** *Linie ekwipotencjalne w modelu płytkiej wody, w ustalonej chwili czasu $\omega t = 2\pi$.*

Na powyższych rysunkach przedstawiono rodzinę linii ekwipotencjalnych w ustalonej chwili. Na osi poziomej argumentem jest kx_1 w przedziale $(0, 2\pi)$ czyli dla pojedynczego grzbietu powierzchni $\xi = \mathtt{Re}\left\{\hat{x}ie^{i(kx_1-\omega t)}\right\}$



Zauważmy, że na płytkiej wodzie linie ekwipotencjalne są niemal pionowe czyli wektor prędkości $\boldsymbol{v} = \mathtt{grad}\Phi$ poziomy.

Ruch cząstek. Gdy wyznaczone jest pole prędkości (5.13) możemy znaleźć tory cząstek

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) \tag{5.14}$$

z warunkiem początkowym (w stanie niezaburzonym) $\boldsymbol{x}|_{t=0} = \boldsymbol{x}_0$. Szukając rozwiązania równania (5.14) dokonajmy rozwinięcia prędkości wokół położenia $\boldsymbol{x}_0$. W pierwszym przybliżeniu założymy, że przemieszczenia są niewielkie, odrzucimy zatem wyrazy $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ rozwinięcia (czyli przyjmujemy, że w otoczeniu punktu pole prędkości jest stałe)

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_0, t) + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \cdot \mathtt{grad}\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} + O\left(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^2\right) \approx \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_0, t) \tag{5.15}$$

Wtedy

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_0, t)$$

Prawe strony równań są proporcjonalne do $e^{-i\omega t}$

$$\boldsymbol{v} = \mathtt{Re}\left\{\frac{\omega\hat{\xi}}{\mathtt{sinh}(kh)} e^{i(kx-\omega t)} \begin{bmatrix} \mathtt{cosh}[k(x_3+h)] \\ -i\mathtt{sinh}[k(x_3+h)] \end{bmatrix}\right\}$$

stąd rozwiązanie będzie proporcjonalne do $e^{-i\omega t}$ podzielonego przez $-i\omega$, plus addytywne stałe całkowania odpowiedzialne za położenie w chwili początkowej. Zatem

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 &= \mathtt{Re}\left\{\frac{\hat{\xi}}{\mathtt{sinh}(kh)} e^{i(kx_{10}-\omega t)} \begin{bmatrix} i\mathtt{cosh}[k(x_{30}+h)] \\ \mathtt{sinh}[k(x_{30}+h)] \end{bmatrix}\right\} \\ &= \frac{\hat{\xi}}{\mathtt{sinh}(kh)} \begin{bmatrix} -\mathtt{cosh}[k(x_{30}+h)]\sin(kx_{10}-\omega t) \\ \mathtt{sinh}[k(x_{30}+h)\cos(kx_{10}-\omega t)] \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.16}$$

Stąd torem cząstek są ... elipsy, których półosie a, b są zwrócone poziomo i pionowo a mimośród $e = \frac{a}{b} = \mathtt{tanh}[k(x_3+h)]$ (zmienia się z głębokością)

$$\left(\frac{x_1 - x_{10}}{\mathtt{cosh}[k(x_{30}+h)]}\right)^2 + \left(\frac{x_3 - x_{30}}{\mathtt{sinh}[k(x_{30}+h)]}\right)^2 = \frac{\left(\hat{\xi}\right)^2}{\mathtt{sinh}^2(kh)}.$$

`Uwagi`

— Pionowe przemieszczenia są zgodne w fazie z grzbietami fal.
Rzeczywiście, biorąc cząstkę na powierzchni $x_{30} = 0$ otrzymujemy

$$x_3 - x_{30} = x_3 = \mathtt{Re}\left\{\frac{\hat{\xi}}{\mathtt{sinh}(kh)} e^{i(kx_{10}-\omega t)}\mathtt{sinh}[k(0+h)]\right\} = \mathtt{Re}\left\{\hat{\xi}e^{i(kx_{10}-\omega t)}\right\}$$

czyli dokładnie równanie powierzchni swobodnej (5.10). Potwierdza to nasze wcześniejsze stwierdzenie, że cząstka na powierzchni pozostaje przez cały czas na powierzchni (Wynik ten pozostał w mocy pomimo przyjętych przybliżeń i uproszczeń.).

— Gdy fala porusza się w prawo cząstki poruszają się po elipsie zgodnie z ruchem wskazówek zegara, gdy w lewo - przeciwnie.
— Jeżeli w rozwinięciu Taylora prędkości (5.15) uwzględnić następne wyrazy, okazuje się, że elipsy nie domykają się lecz cząstki mają małe stałe przesunięcie w kierunku propagacji. Zwane jest ono unoszeniem (dryfowaniem) Stokesa (wyznaczył je on w 1847).

5.3. Uzupełnienie.

W tym paragrafie przedstawimy niektóre wyniki dotyczące związków dyspersyjnych $\omega = \omega(k)$. Prędkością grupową nazywamy wielkość

$$c_g = \frac{d\omega}{dk}.$$

Dla układów dyspersyjnych zależy ona od k. Ma ona kilka ważnych własności:
1. Jest to prędkość z jaką odizolowana *paczka falowa* przemieszcza się jako całość.
2. W wyniku pewnego skomplikowanego, zlokalizowanego, początkowego wzbudzenia (np. wrzucenia kamienia do jeziora) jest to ta wartość prędkości z jaką w dłuższym okresie czasu należy się przemieszczać aby ciągle obserwować fale o tej samej długości $\lambda = \frac{2\pi}{k}$.
3. Jest to prędkość z którą przemieszcza się energia fal o długości $\lambda = \frac{2\pi}{k}$.

5.3.1. Ruch pakietu falowego.

Przedstawmy ogólne zaburzenie rozchodzące się wzdłuż osi $0x$ w postaci Fouriera

$$\xi(x,t) = \mathtt{Re}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} a(k)e^{i(kx-\omega t)}\,dk\right\} \qquad \text{gdzie } \omega = \omega(k). \tag{5.17}$$

W dalszym ciągu będziemy pisać po prostu $\xi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(k)e^{i(kx-\omega t)}\,dk$ w domyśle rozumiejąc, że brana jest tylko część rzeczywista wyrażenia po prawej stronie.

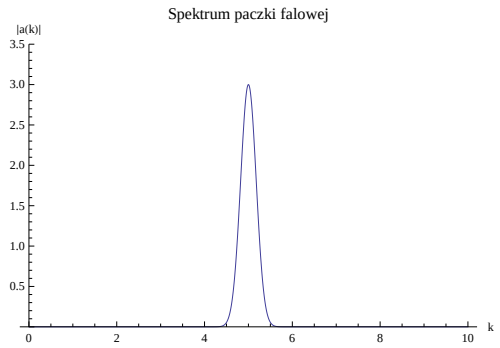
W przypadku gdy $a(k) = \delta(k-k_0)$ otrzymujemy

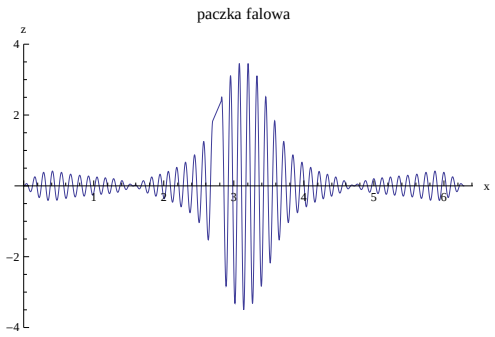
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(k-k_0)e^{i(kx-\omega t)}\,dk = e^{i(k_0x-\omega(k_0)t)}$$

czyli nieskończenie wiele grzbietów o równych amplitudach.

Rysunek 5.7. *Zaburzenie $\xi(x,t_0) = e^{i(k_0x-\omega(k_0)t_0)}$ w ustalonej chwili t_0. Nieskończenie wiele grzbietów.*

Rozważmy sytuację, w której zaburzenie rozchodzi się w postaci paczki falowej o prawie stałej liczbie falowej k_0 i amplitudzie wolno zmiennej wraz z x. Amplituda $a(k)$ różnych składowych fourierowskich jest wtedy bardzo mała (znika) poza k w otoczeniu k_0.





Rozwijając $\omega(k)$ w otoczeniu k_0 w szereg Taylora i odrzucając wyższe wyrazy mamy

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0)c_g \quad \text{gdzie } c_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0}$$

Po podstawieniu do (5.17) otrzymujemy

$$\xi(x,t) = e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} a(k) e^{i(k-k_0)(x-c_g t)}\, dk$$

Przed znakiem całki mamy czystą falę harmoniczną o liczbie falowej k_0, natomiast całka daje nam funkcję zmiennych x oraz t ale szczególnej postaci, zależnej jedynie od $(x - c_g t)$. Oznacza to, że obwiednia fal i w konsekwencji cały pakiet falowy porusza się z prędkością grupową $c_g = \frac{d\omega}{dk}|_{k=k_0}$.

Jak wzbudzić taki pakiet falowy? Używając generatora fal o określonej częstotliwości ω_0 podnosząc powoli amplitudę od zera do pewnego maksimum i następnie redukować do zera. Większość energii fali będzie skoncentrowana ściśle wokół $k = k_0$, gdzie k_0 należy wyznaczyć na podstawie ω_0 ze związków dyspersyjnych $\omega = \omega(k)$. Związki te muszą być wcześniej znane dla rozpatrywanego układu.

5.3.2. Długoterminowa odpowiedź na zaburzenie zlokalizowane w przestrzeni.

Rozważmy wolno zmienną paczkę falową postaci

$$\xi(x,t) = A(x,t)e^{i\Theta(x,t)} \tag{5.18}$$

gdzie jak poprzednio należy rozumieć, że bierzemy część rzeczywistą. *Faza* $\Theta(x,t)$ opisuje drgania fali, natomiast $A(x,t)$ opisuje zmiany amplitudy (w przestrzeni i czasie). Liczba falowa k i częstość ω są w tym modelu zdefiniowane następująco

$$k = \frac{\partial\Theta}{\partial x}, \qquad \omega = -\frac{\partial\Theta}{\partial t} \tag{5.19}$$

Dla czystej fali harmonicznej (sinusoidalnej), dla której Θ jest liniową funkcją x oraz t, wielkości k i ω są oczywiście stałe i faza $\Theta = kx - \omega t$. W przypadku ogólnym k i ω podobnie jak i amplituda A zależą od położenia i czasu. Wiąże je ze sobą związek dyspersyjny $\omega = \omega(k)$. Wprost z równości (5.19) wynika

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$$

co wykorzystując związek dyspersyjny możemy przepisać w postaci

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{d\omega}{dk}\frac{\partial k}{\partial x} = 0$$

czyli (uwzględniając pojęcie prędkości grupowej c_g)

$$\frac{\partial k}{\partial t} + c_g \frac{\partial k}{\partial x} = 0. \tag{5.20}$$

Tak jak operator $\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}$ oznacza pochodną (substancjalną) po czasie gdy poruszamy się z prędkością v tak równanie (5.20) oznacza, że wielkość $k(x,t)$ pozostaje stała dla obserwatora poruszającego się z prędkością $c_g(k)$, zgodnie z tym co powiedzieliśmy na początku tego paragrafu.

Inaczej ten sam wniosek możemy wysnuć traktując (5.20) jako równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych, którego uwikłanym rozwiązaniem jest

$$k = f(x - c_g(k)t)$$

gdzie f jest dowolną funkcją (jej postać należy wyznaczyć z warunków początkowych). Stąd widać, że k pozostaje stałe gdy $x - c_g t$ jest stałe.

Zadanie 5.1. Oszacować, w modelu fal na głębokiej wodzie, czas po którym poszczególne składowe fourierowskie zlokalizowanej paczki falowej rozproszą się na tyle aby być obserwowanymi lokalnie jako fale sinusoidalne. ♠

`Rozwiązanie.` Niech w chwili początkowej $t = 0$ będzie dane zlokalozowane w punkcie $x = 0$ zaburzenie, które rozprzestrzenia się w prawo i lewo spełniając związki dyspersyjne, jak w modelu głębokiej wody

$$\omega = \sqrt{gk}\,, \qquad \text{dla } k > 0. \tag{5.21}$$

Wczesna odpowiedź układu będzie bardzo skomplikowana, lecz po odpowiednio długim czasie poszczególne składowe fourierowskie ulegną rozproszeniu. Obserwować będziemy wolno modulowaną falę, która będzie prawie sinusoidalna, lecz z liczbą falową i częstością zależnymi od położenia i zmieniającymi się w czasie $k(x,t)$, $\omega(x,t)$. (W modelu fal na głębokiej wodzie możemy spodziewać się wydłużenia fal wraz z odległością jako, że długie fale poruszają się szybciej.)

Jak już wiemy aby obserwować cały czas falę o danej długości, musimy poruszać się z prędkością

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}.$$

Innymi słowy fale będą lokalnie sinusoidalne, z długością $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, w otoczeniu punktu $x = c_g t$.

Zatem dla dowolnego (dużego) x oraz t liczba falowa obserwowanej tam fali

$$k = \frac{gt^2}{4x^2} \tag{5.22}$$

Stąd i z równości (5.21) częstość $\omega = \dfrac{gt}{2x}$. Faza $\Theta(x,t)$ jest rozwiązaniem układu (5.19)

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{gt^2}{4x^2}\,, \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\frac{gt}{2x}$$

Stąd

$$\Theta(x,t) = -\frac{gt^2}{4x} + \varepsilon\,, \qquad \varepsilon = const.$$

Równanie powierzchni jest zatem postaci $\xi(x,t) = A(x,t)e^{-i\frac{gt^2}{4x}+i\varepsilon}$. Amplituda $A(x,t)$ zależy oczywiście od postaci początkowego zaburzenia.

Z równości (5.22) znajdujemy, że $\lambda = 8\pi\dfrac{x^2}{gt^2}$. Gdy przesuniemy się o δx to λ zmieni się o wartość $16\pi\dfrac{x}{gt^2}\delta x$. Zatem na przestrzeni jednej długości fali $\delta x = \lambda$ zmiana $\delta\lambda = 16\pi\dfrac{x}{gt^2}\lambda$, zaś

względna zmiana $\dfrac{\delta\lambda}{\lambda} = 16\pi\dfrac{x}{gt^2}$. Ta wielkość musi być mała jeżeli o fali chcemy powiedzieć, że jest lokalnie sinusoidalna. A zatem podstawowy warunek jaki musi być spełniony to

$$\frac{1}{16\pi}\frac{gt^2}{x} \gg 1.$$

Warunek ten możemy też odczytywać następująco: jak długo trzeba czekać w punkcie x zanim różne składowe fourierowskie rozproszą się tak aby być widoczne jako lokalnie sinusoidalne. ♠

5.3.3. Prędkość przenoszenia energii.

W szczególnym przypadku pojedynczej paczki falowej jest oczywistym, że energia jest przenoszona z predkością grupową. Paczka jest bowiem tam gdzie jest cała energia. Paczka porusza się z prędkością grupową zatem i energia unoszona jest z prędkością grupową. Bez dowodu stwierdzimy, że jest to sytuacja ogólna, słuszna dla każdej fali.

Zadanie 5.2. `Równanie fal na płytkiej wodzie. Tsunami.` Znaleźć rozwiązanie równania fal na stojącej wodzie w przypadku gdy głębokość $h(x)$ zmienia się według prawa

$$h(x) = \begin{cases} \alpha x & \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell \\ h_\infty & \text{dla} \quad \ell \leqslant x \end{cases}$$

⋮

5.4. Dodatek. Solitony

Od początku studiów nad równaniami różniczkowymi aż do lat siedemdziesiątych dwudziestego wieku główny postęp dokonywał się na polu równań liniowych tzn. takich w których szukana funkcja lub jej pochodne występują w pierwszej potędze. Główną przyczyną tego stanu rzeczy jest fakt, że równania liniowe spełniają *zasadę superpozycji*. Mówi ona, że liniowe kombinacje rozwiązań równania też są jego rozwiązaniem. Leży ona u podstaw metody szeregów i transformaty Fouriera gdzie rozwiązanie ogólne jest przedstawione jako szereg lub całka pewnych rozwiązań szczególnych.

W ostatnich czterdziestu latach jednak, dokonano ogromnego postępu w dziedzinie równań nieliniowych. Jednym z niezwykle ciekawych przykładów są równania solitonowe tzn. posiadające rozwiązanie w postaci odosobnionej fali (ang. solitary wave) - solitonu. Dla równań tych, choć są one nieliniowe, można wprowadzić metodę rozwiązywania analogiczną do metody Fouriera tzw. metodę odwrotnego rozpraszania. Soliton to samopodtrzymująca się, odosobniona fala (pakiet falowy), która zachowuje swój kształt podczas propagacji ze stałą predkoscią nie ulegając dyspersji. Mogą one silnie oddziaływać z innymi solitonami, ale po zderzeniu zachowują niezmienioną formę – wystapi tylko przesuniecie w fazie. Stabilność solitonów jest efektem dwóch wzajemnie znoszących się efektów: dyspersji - rozpływania się i nieliniowości - koncentrowania (lokalizowania). Gdyby zabrakło jednego z nich soliton stałby się niestabilny i przestałby istnieć.

Klasycznym przykładem równania solitonowego jest równanie Kortevega-de Vriesa (KdV). Poniżej przedstawimy rozważania prowadzące do tego równania, korzystając z klasycznego jednowymiarowego równania falowego:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right) f = 0$$

Posiada ono rozwiązanie ogólne w postaci superpozycji fal biegnących w prawo $\psi(x-ct)$ i w lewo $\tilde{\psi}(x+ct)$. Rozważmy równanie opisujące monochromatyczną falę rozchodzacą się w jednym kierunku

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{5.23}$$

i jego rozwiązanie w postaci monochromatycznej fali płaskiej $f(x,k) = e^{i(kx-\omega t)} = e^{ik(x-ct)}$, gdzie częstość $\omega(k) = ck$ w ośrodku bezdyspersyjnym jest liniową funkcją wektora falowego.

W przypadku ośrodka ze słabą dyspersją szukając równania opisujacego rozwiazanie solitonowe przyjmijmy, ze $\omega(k) = ck + \beta k^3$, zatem rozwiazanie bedzie postaci:

$$f(x,k) = e^{ik(x-ct)-i\beta k^3 t}$$

Powyzsze funkcja nie jest już rozwiazaniem równania (5.23). Musi ono zostać zmodyfikowane. Pochodna po czasie $e^{ik(x-ct)-i\beta k^3 t}$ zawiera teraz dodatkowy składnik k^3, aby go uprościć należy w równaniu dodać człon $\frac{\partial^3}{\partial x^3}$. Przyjmie zatem ono postać:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c\frac{\partial f}{\partial x} - \beta\frac{\partial^3}{\partial x^3} = 0.$$

Jest to nadal równanie liniowe, które możemy zapisać w postaci równania ciągłości (porównaj równanie (3.2) i dyskusję bezpośrednio po nim):

$$\frac{\partial}{\partial t}(f) + \frac{\partial}{\partial x}\left[cf - \beta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right] = 0.$$

Jezeli oznaczymy gestosc ładunku jako $\varrho = f$ oraz gestosc pradu $j = cf - \beta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, to wówczas otrzymujemy jednowymiarowe równanie postaci: $\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathtt{div} j = 0$.

Niech teraz gęstość prądu j będzie nieliniową funkcją f. Najprościej jak można zastąpimy człon liniowy przez kwadratowy. Wówczas $j = c\alpha^2 f^2 - \beta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Równanie przyjmuje wówczas postać:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + 2c\alpha\, f\frac{\partial f}{\partial x} - \beta\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0.$$

Jest to poszukiwane nieliniowe równanie fali w ośrodku dyspersyjnym. Wartości współczynników tego równania są umowne, ponieważ jeśli podstawimy: $f = a\,u$, $x = b\,x'$, $t = d\,t'$ otrzymamy równanie:

$$\frac{1}{d}\frac{\partial u}{\partial t'} + 2c\alpha\frac{a}{b}\,u\frac{\partial u}{\partial x'} - \frac{\beta}{b^3}\frac{\partial^3 u}{\partial x'^3} = 0.$$

Przy odpowiednim doborze współczynników $a, b, c, d, \alpha, \beta$ otrzymamy równanie Kortevega-de Vriesa (KdV) w ogólnie przyjętej historycznej postaci

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6\,u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \tag{5.24}$$

lub w skróconym zapisie, w którym pochodną cząstkową oznaczamy indeksem dolnym:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

Podobnie jak dla liniowego równania falowego można udowodnić[4], że *rozwiązania równania KdV, które dostatecznie szybko zanikają w nieskończoności są jednoznacznie wyznaczane przez warunki poczatkowe.*

Zastanówmy sie teraz *czy istnieje rozwiazanie równania (5.24) w postaci fali.*
Niech $u(x,t) = f(x-ct)$. Oznaczmy równiez $\zeta = x - ct$, wówczas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x} = f'$$

[4] Dowód. Niech funkcje u i v beda rozwiązaniami równania (5.24) tzn $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$oraz $v_t + 6vv_x + v_{xxx} = 0$. Odejmując te równania stronami otrzymujemy $u_t - v_t + 6u\,(u_x - v_x) + 6\,(u-v)\,v_x + u_{xxx} - v_{xxx} = 0$. Oznaczając $w = u - v$, otrzymujemy:

$$w_t + 6uw_x + 6wv_x + w_{xxx} = 0$$

gdzie $f' := \frac{\partial f}{\partial \zeta}$. Stąd $\frac{\partial^3 u}{\partial x} = f'''$. Analogicznie $\frac{\partial u}{\partial t} = -cf'$. Czyli równanie (5.24) można zapisać jako:

$$-cf' + 6ff' + f''' = 0$$

Wyciągnijmy teraz przed kazdy składnik pochodną:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\zeta}(-cf) + \frac{d}{d\zeta}\left(3f^2\right) + \frac{d}{d\zeta}(f'') &= 0 \\ \frac{d}{d\zeta}\left[-cf + 3f^2 + f''\right] &= 0 \end{aligned}$$

Całkując stronami otrzymujemy:

$$-cf + 3f^2 + f'' = m$$

Pomnóżmy teraz powyższe równanie stronami przez f':

$$-cff' + 3f'f^2 + f'f'' - mf' = 0$$

Analogicznie jak poprzednio wyciągnijmy przed kazdy składnik pochodna:

$$\frac{d}{d\zeta}\left[-c\frac{1}{2}f^2 + f^3 + \frac{1}{2}(f')^2 - mf\right] = 0$$

Całkujac stronami otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}(f')^2 + f^3 - \frac{c}{2}f^2 - mf = n$$

Aby funkcja f znikała w nieskonczonosci musimy przyjac, ze $m = n = 0$, zatem:

$$\frac{1}{2}(f')^2 + f^3 + \frac{c}{2}f^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{d\zeta} = f\sqrt{c - 2f}$$

Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych $d\zeta = \frac{df}{f\sqrt{c-2f}}$. Po scałkowaniu otrzymujemy rowiazanie:

$$f(\zeta) = \frac{c}{2}\left[\frac{2}{e^{\frac{\sqrt{c}}{2}(\zeta - x_0)} + e^{-\frac{\sqrt{c}}{2}(\zeta - x_0)}}\right]^2 \quad \Rightarrow \quad f(\zeta) = \frac{c}{2}\mathtt{sech}^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(\zeta - x_0)\right]$$

gdzie: x_0 – stała całkowania, odowiada za położenie w chwili poczatkowej. Wracajac do starych zmiennych:

$$u(x,t) = \frac{c}{2}\mathtt{sech}^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(\zeta - x_0)\right]$$

Rozwiazanie równania (2.6) istnieje tylko dla predkosci rozchodzenia sie fali c ¿ 0. Przemieszcza sie ona zawsze w prawa strone, a predkosc propagacji jest proporcjonalna do amplitudy fali (fale o wiekszej amplitudzie rozchodza sie szybciej). Fala, która przedstawia równanie (2.7) nazwana jest solitonem.

Mnożąc powyższe równanie przez w i całkujac po całej płaszczyźnie rzeczywistej dostaniemy: po prawej stronie zero, zaś po lewej

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}\left(ww_t + 6uww_x + 6w^2v_x + ww_{xxx}\right)dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}w^2\right)_t + 3u\left(w^2\right)_x + 6w^2v_x + ww_{xxx}\right]dx \\ \left\{\begin{matrix}\text{całkując przez}\\ \text{części}\end{matrix}\right\} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}w^2\,dx + \underbrace{\left[3uw^2\right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty}3u_xw^2\,dx + \int_{-\infty}^{\infty}\left[6w^2v_x + ww_{xxx}\right]dx \end{aligned}$$

Policzmy teraz wartość

$$\left|\frac{d}{dt}E(t)\right| : (6v_x - 3u_x)w^2\,dx| \leqslant 2SE(t)$$

Zatem $|E(t)| \leqslant E_0e^{2St}$. Jeżeli przyjmiemy, że w chwili początkowej $t = 0$ mamy $E_0 = 0$, to otrzymamy: $|E(t)| = 0$ czyli $E(t) \equiv 0$, wiec $w = 0$, co oznacza, że $u = v$.

Rozdział 6

Równania ruchu cieczy lepkiej

6.1. Równanie ruchu cieczy lepkiej

Jak pokazaliśmy w paragrafie 3.7 tensor gęstości strumienia cieczy idealnej

$$\pi_{ik} := p\,\delta_{ik} + \varrho\, v_k v_i$$

przedstawia proces przenoszenia pędu związany z mechanicznym ruchem elementów cieczy i działającym ciśnieniem (porównaj uwagi po wzorze (3.24)).

Będziemy teraz chcieli uwzględnić dodatkowy proces tarcia wewnętrznego czyli przenoszenie pędu z miejsc o większej prędkości do miejsc o prędkości mniejszej. Do tensora strumienia pędu cieczy idealnej dodamy wyraz określający proces przenoszenia pędu w cieczy na skutek lepkiego "wleczenia"

$$\pi_{ik} := \; p\,\delta_{ik} + \varrho\, v_k v_i \; - \; S'_{ik} \; = \; -S_{ik} \; + \; \varrho\, v_k v_i \tag{6.1}$$

Jak pokazaliśmy (wyprowadzając różniczkową postać równania ruchu cieczy idealnej) tensor naprężeń cieczy idealnej $S_{ik} = -p\,\delta_{ik}$. Dle cieczy lepkiej

$$S_{ik} \; = \; -p\,\delta_{ik} \; + \; S'_{ik}. \tag{6.2}$$

Tensor S'_{ik} nazywamy *lepkim tensorem napięć.*

Aby określić ogólną postać tensora S'_{ik} zauważmy, że

— Procesy tarcia wewnętrznego występują tylko wtedy gdy różne elementy cieczy poruszają się z różnymi prędkościami czyli gdy występuje względny ruch poszczególnych elementów cieczy. Stąd S'_{ik} powinien zależeć od pochodnych $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_k}$ wtedy gdy $\texttt{grad}\, v_i = 0 \implies S'_{ik} = 0$.

— W pierwszym przybliżeniu możemy przyjąć, że S'_{ik} jest liniową funkcją $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_k}$.

— Tensor S'_{ik} powinien znikać również gdy ciecz jako całość wykonuje jednostajny ruch obrotowy - wtedy bowiem poszczególne warstwy nie zmieniają wzajemnego położenia. Liniowymi kombinacjami pochodnych $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_k}$, które dla $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ stają się równe zero są $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_k} + \dfrac{\partial v_k}{\partial x_i}$.

Najogólniejszą postacią tensora spełniającego te warunki, przy dodatkowym założeniu, że ciecz jest izotropowa (ma te same własności w każdym kierunku), jest

$$S'_{ik} \; = \; \eta\,(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial v_m}{\partial x_m}) \; + \; \xi\,\delta_{ik}\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial v_m}{\partial x_m}$$

gdzie współczynniki η, ξ nie zależą od prędkości.

Wielkość η nazywa się *współczynnikiem lepkości dynamicznej*, ξ *drugim współczynnikiem lepkości* (*drugą lepkością*). W większości przypadków zmiana współczynników lepkości wzdłuż strumienia cieczy jest nieznaczna i można je traktować jako **stałe**. Można pokazać, że oba są dodatnie

$$\eta > 0\,, \quad \xi > 0.$$

Równanie ruchu swobodnej cieczy lepkiej otrzymamy z równania (**??**)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho v_i) \;=\; -\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(\pi_{ik})$$

podstawiając π_{ik} postaci (6.1)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\varrho v_i) &= -\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(p\delta_{ik}+\varrho v_k v_i)+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial S'_{ik}}{\partial x_k}\\
\frac{\partial}{\partial t}(\varrho v_i)+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(\varrho v_k v_i) &= -\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial p}{\partial x_k}\delta_{ik}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial S'_{ik}}{\partial x_k}
\end{aligned}$$

Lewa strona jest równa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\varrho v_i)+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(\varrho v_k v_i) &= \varrho\frac{\partial v_i}{\partial t}+\frac{\partial \varrho}{\partial t}v_i+\sum_{k=1}^{3}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}(\varrho v_k)v_i+\varrho v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right]\\
&= \varrho\left[\frac{\partial v_i}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right]+v_i\left[\frac{\partial \varrho}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(\varrho v_k)\right]\\
&= \varrho\underbrace{\left[\frac{\partial v_i}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\mathtt{grad}\,v_i\right]}_{\frac{dv_i}{dt}}+v_i\underbrace{\left[\frac{\partial \varrho}{\partial t}+\mathtt{div}(\varrho\boldsymbol{v})\right]}_{=0\ \text{(r. ciągł.)}}
\end{aligned}$$

Prawa strona

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial S'_{ik}}{\partial x_k} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\Big[\,\eta\,(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial v_m}{\partial x_m})\;+\;\xi\,\delta_{ik}\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial v_m}{\partial x_m}\Big]\\
&= -\frac{\partial p}{\partial x_i}+\eta\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2}+\eta\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i\partial x_k}-\frac{2}{3}\eta\frac{\partial}{\partial x_i}(\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial v_m}{\partial x_m})\;+\;\xi\frac{\partial}{\partial x_i}(\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial v_m}{\partial x_m})\\
&= -\frac{\partial p}{\partial x_i}+\eta\,\Delta v_i+\eta\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathtt{div}\,\boldsymbol{v})-\frac{2}{3}\eta\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathtt{div}\,\boldsymbol{v})+\xi\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathtt{div}\,\boldsymbol{v})\\
&= -\frac{\partial p}{\partial x_i}+\eta\,\Delta v_i+\;(\xi+\frac{1}{3}\eta)\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathtt{div}\,\boldsymbol{v})
\end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy równanie ruchu swobodnej cieczy lepkiej tzw. równanie *Naviera* (1827)-*Stokesa* (1845)

$$\varrho\Big[\frac{\partial v_i}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\mathtt{grad}\,v_i\Big]=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\eta\,\Delta v_i+\;(\xi+\frac{1}{3}\eta)\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathtt{div}\,\boldsymbol{v}).$$

Zapisane w postaci wektorowej

$$\varrho\,\Big[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\mathtt{grad})\,\boldsymbol{v}\Big]\;=\;-\mathtt{grad}\,p\;+\;\eta\,\Delta\boldsymbol{v}+\;(\xi+\frac{1}{3}\eta)\,\mathtt{grad}(\mathtt{div}\,\boldsymbol{v}). \tag{6.3}$$

Równanie to wraz z równaniem ciągłości i równaniem stanu stanowi układ równań opisujących przepływ cieczy lepkiej.

Układ ten musi być jeszcze uzupełniony o warunki brzegowe.

— Będziemy przyjmować, że warstwa cieczy lepkiej przylegająca do ścianki jest całkowicie zatrzymana tzn.

$$\boldsymbol{v}|_{\partial\Omega}=0$$

czyli znika składowa normalna $v_{\boldsymbol{n}}$ (tak jak dla cieczy idealnej), ale również składowa styczna $v_{\boldsymbol{t}}$ (w przeciwieństwie do cieczy idealnej).

— W przypadku poruszającej się powierzchni prędkość przylegającej warstwy cieczy $\boldsymbol{v}$ przyjmujemy równą prędkości ściany.

Uwaga

Dla cieczy nieściśliwej ($\varrho = const \implies$ z równania ciągłości $\mathtt{div}\,\boldsymbol{v} = 0$) w równaniu Naviera-Stokesa (6.1) znika ostatni wyraz

$$\varrho\,[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\mathtt{grad})\,\boldsymbol{v}] \;=\; -\mathtt{grad}\,p \;+\; \eta\,\Delta\boldsymbol{v}$$

6.2. Równania ruchu w układach współrzędnych walcowych i sferycznych

Współrzędne walcowe. Wektor $\boldsymbol{v}$ zapisujemy w bazie jednostkowych wektorów stycznych $\boldsymbol{e_r}$, $\boldsymbol{e_\varphi}$, $\boldsymbol{e_z}$ (porównaj paragraf 2.3)

$$\boldsymbol{v} = v_r\boldsymbol{e_r} + v_\varphi\boldsymbol{e_\varphi} + v_z\boldsymbol{e_z}.$$

Składowe tensora napięć w układzie współrzędnych walcowych przedstawiają się następująco

$$S_{rr} = -p + 2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r}\,, \quad S_{r\varphi} = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}\right), \quad S_{rz} = \eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right),$$
$$S_{\varphi\varphi} = -p + 2\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{v_r}{r}\right), \quad S_{\varphi z} = \eta\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial z}\right),$$
$$S_{zz} = -p + 2\eta\frac{\partial v_z}{\partial z}\,.$$

Składowe równania Naviera-Stokesa przyjmują wtedy postać

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,v_r - \frac{v_\varphi^2}{r} \;=\; -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\eta}{\varrho}\left(\triangle v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right), \tag{6.4a}$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,v_\varphi + \frac{v_\varphi v_r}{r} \;=\; -\frac{1}{\varrho\,r}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\eta}{\varrho}\left(\triangle v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}\right), \tag{6.4b}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,v_z \;=\; -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\eta}{\varrho}\triangle v_z\,, \tag{6.4c}$$

gdzie

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,f = v_r\frac{\partial f}{\partial r} \;+\; \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial f}{\partial\varphi} \;+\; v_z\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{6.4d}$$

Zaś Laplasian $\triangle f$ wyraża się wzorem (2.22d). Równanie ciągłości ma postać

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} \;+\; \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\,(\varrho\,r\,v_r) \;+\; \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\,(\varrho\,v_\varphi) \;+\; \frac{\partial\varrho\,v_z}{\partial z} \;=\; 0\,. \tag{6.4e}$$

Współrzędne sferyczne. Wektor $\boldsymbol{v}$ zapisujemy w bazie jednostkowych wektorów stycznych $\boldsymbol{e_r}$, $\boldsymbol{e_\theta}$, $\boldsymbol{e_\varphi}$ (porównaj paragraf 2.3)

$$\boldsymbol{v} = v_r\boldsymbol{e_r} + v_\theta\boldsymbol{e_\theta} + v_\varphi\boldsymbol{e_\varphi}.$$

Składowe tensora napięć w układzie współrzędnych sferycznych przedstawiają się następująco

$$S_{rr} = -p + 2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r}\,, \quad S_{r\theta} = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}\right), \quad S_{r\varphi} = \eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right),$$
$$S_{\theta\theta} = -p + 2\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_r}{r}\right), \quad S_{\theta\varphi} = \eta\left(\tfrac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi} + \tfrac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\theta} - \frac{v_\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta}{r}\right),$$
$$S_{\varphi\varphi} = -p + 2\eta\left(\tfrac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta\,\mathrm{ctg}\,\theta}{r}\right).$$

Składowe równania Naviera-Stokesa przyjmują wtedy postać

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\, v_r - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} = \\ = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\eta}{\varrho}\left(\triangle v_r - 2\frac{v_r}{r^2} - 2\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial \sin\theta v_\theta}{\partial\theta} - 2\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial \sin\theta v_\varphi}{\partial\varphi}\right), \tag{6.5a}$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\, v_\theta + \frac{v_\theta v_r}{r} - \frac{\operatorname{ctg}\theta\, v_\varphi^2}{r} = \\ = -\frac{1}{\varrho\, r}\frac{\partial p}{\partial\theta} + \frac{\eta}{\varrho}\left(\triangle v_\theta + 2\frac{1}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta} - 2\frac{\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right), \tag{6.5b}$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\, v_\varphi + \frac{v_\varphi v_r}{r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta\, v_\varphi v_\theta}{r} = \\ = -\frac{1}{\varrho\, r}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\eta}{\varrho}\left(\triangle v_\varphi + \frac{2}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta} - 2\frac{\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right), \tag{6.5c}$$

gdzie

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\, f = v_r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}. \tag{6.5d}$$

Zaś Laplasian $\triangle f$ wyraża się wzorem (2.23d). Równanie ciągłości ma natomiast postać

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\varrho r^2 v_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\varrho\sin\theta\, v_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varrho v_\varphi}{\partial\varphi} = 0\,. \tag{6.5e}$$

6.3. Proste modele przepływu nieściśliwej cieczy lepkiej

Zadanie 6.1. Znaleźć rozkład prędkości stacjonarnego przepływu nieściśliwej cieczy lepkiej pomiędzy dwoma równoległymi nieskończonymi płaszczyznami poruszającymi się względem siebie z prędkością $\boldsymbol{u}$ odległymi od siebie o h. ♠

Zadanie 6.2. Znaleźć rozkład prędkości stacjonarnego przepływu nieściśliwej cieczy lepkiej pomiędzy dwoma równoległymi nieskończonymi nieruchomymi płaszczyznami odległymi od siebie o h pod wpływem gradientu ciśnienia. ♠

Zadanie 6.3. Znaleźć stacjonarny rozkład prędkości nieściśliwej cieczy lepkiej w cylindrycznej rurze o promieniu R i przepustowość rury (ilośc masy cieczy przepływającą w jednej sekundzie przez przekrój poprzeczny). ♠

Zadanie 6.4. Znaleźć przepustowość rury i stacjonarny rozkład prędkości nieściśliwej cieczy lepkiej w rurze o przekroju pierścieniowym o promieniu wewnętrznym R_1 i zewnętrznym R_2. ♠

Zadanie 6.5. Walec o promieniu R_1 porusza się równolegle do swej osi z prędkością $\boldsymbol{u}$ wewnątrz współosiowego z nim walca o promieniu R_2. Wyznaczyć ruch cieczy wypełniającej przestrzeń między tymi walcami. ♠

6.4. Prawa podobieństwa hydrodynamicznego

W praktyce, bardzo ważną rzeczą jest możliwość badania zjawisk na modelach opływanych ciał o podobnych kształtach geometrycznych.

Rozważmy dwa płyny w dwóch róznych układach współrzędnych (x_1, x_2, x_3, t) oraz (x'_1, x'_2, x'_3, t'). Ruch pierwszego płynu opisany jest przez
- prędkość $\boldsymbol{v}(x,t)$,
- gęstość $\varrho(x,t)$,
- ciśnienie $p(x,t)$,
- siłę objętościową $\boldsymbol{f}(x,t)$,
- lepkość dynamiczną η.

Równanie Naviera-Stokesa

$$\varrho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \varrho\boldsymbol{f} - \mathtt{grad}\,p + \eta\Delta\,\boldsymbol{v} + \frac{1}{3}\eta\,\mathtt{grad}\,(\mathtt{div}\boldsymbol{v}) \tag{6.6}$$

Odpowiednio ruch drugiego płynu w drugim układzie jest opisany przez analogiczne wielkości
- prędkość $\boldsymbol{v'}(x',t')$,
- gęstość $\varrho'(x',t')$,
- ciśnienie $p'(x',t')$,
- siłę objętościową $\boldsymbol{f'}(x',t')$,
- lepkość dynamiczną η'.

i równanie Naviera-Stokesa

$$\varrho'\frac{d\boldsymbol{v'}}{dt'} = \varrho'\boldsymbol{f'} - \mathtt{grad}'\,p' + \eta\Delta'\,\boldsymbol{v'} + \frac{1}{3}\eta'\,\mathtt{grad}'\,(\mathtt{div}'\boldsymbol{v'}) \tag{6.7}$$

Początki obu układów współrzędnych oraz jednostki dobieramy tak aby

$$\boldsymbol{x'} = \ell_0\boldsymbol{x}\,, \qquad t' = t_0\,t \tag{6.8}$$

Ruchy obu płynów nazywamy *podobnymi* jeżeli istnieją takie stałe v_0, ρ_0, p_0, f_0, η_0, że

$$\boldsymbol{v'}(\boldsymbol{x'},t') = v_0\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = v_0\,\boldsymbol{v}(\frac{\boldsymbol{x'}}{\ell_0},\frac{t'}{t_0}) \tag{6.9a}$$

$$\varrho'(\boldsymbol{x'},t') = \varrho_0\,\varrho(\boldsymbol{x},t) = \varrho_0\,\varrho(\frac{\boldsymbol{x'}}{\ell_0},\frac{t'}{t_0}) \tag{6.9b}$$

$$p'(\boldsymbol{x'},t') = p_0\,p(\boldsymbol{x},t) = p_0\,p(\frac{\boldsymbol{x'}}{\ell_0},\frac{t'}{t_0}) \tag{6.9c}$$

$$\boldsymbol{f'}(\boldsymbol{x'},t') = f_0\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t) = f_0\,\boldsymbol{f}(\frac{\boldsymbol{x'}}{\ell_0},\frac{t'}{t_0}) \tag{6.9d}$$

$$\eta' = \eta_0\,\eta \tag{6.9e}$$

Twierdzenie 6.1. Jeżeli funkcje

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\,,\quad \varrho(\boldsymbol{x},t)\,,\quad p(\boldsymbol{x},t)\,,\quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)\,,\quad \eta$$

spełniają równanie Naviera-Stokesa (6.6) to można tak dobrać stałe v_0, ρ_0, p_0, f_0, η_0 aby funkcje

$$\boldsymbol{v'}(\boldsymbol{x'},t')\,,\quad \varrho'(\boldsymbol{x'},t')\,,\quad p'(\boldsymbol{x'},t')\,,\quad \boldsymbol{f'}(\boldsymbol{x'},t')\,,\quad \eta'$$

związane przez podobieństwo warunkami (6.9a)-(6.9e) spełniały równanie (6.7) gdzie $\boldsymbol{x'} = \ell_0\boldsymbol{x}$, $t' = t_0\,t$.

`Dowód.` Z warunku (6.8) wynikają związki

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{x}' = \ell_0 \boldsymbol{x} \\ t' = t_0\, t \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{ll} \mathtt{grad}' = \dfrac{1}{\ell_0}\mathtt{grad}\,, & \mathtt{div}' = \dfrac{1}{\ell_0}\mathtt{div}\,, \\ \Delta' = \dfrac{1}{\ell_0^2}\Delta\,, & \dfrac{d}{dt'} = \dfrac{1}{t_0}\dfrac{d}{dt}\,. \end{array}\right. \tag{6.10}$$

Podstawiając warunki podobieństwa (6.9a)-(6.9e) do (6.7) otrzymamy

$$\varrho_0 \frac{v_0}{t_0}\, \varrho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \varrho_0 f_0\, \varrho \boldsymbol{f} - \frac{p_0}{\ell_0}\, \mathtt{grad}\, p + \eta_0 \frac{v_0}{\ell_0^2}\, \eta \Delta\, \boldsymbol{v} + \frac{1}{3}\eta_0 \frac{v_0}{\ell_0^2}\, \eta\, \mathtt{grad}\,(\mathtt{div}\boldsymbol{v}). \tag{6.11}$$

Aby funkcje $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$, $\varrho(\boldsymbol{x},t)$, $p(\boldsymbol{x},t)$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$, η spełniały równanie (6.6) muszą zachodzić równości

$$\varrho_0 \frac{v_0}{t_0} = \varrho_0 f_0 = \frac{p_0}{\ell_0} = \eta_0 \frac{v_0}{\ell_0^2}. \tag{6.12}$$

Dodatkowo mamy

$$\boldsymbol{v}' = \frac{d\boldsymbol{x}'}{dt'} = \frac{\ell_0}{t_0}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{\ell_0}{t_0}\boldsymbol{v}$$

czyli

$$v_0 = \frac{\ell_0}{t_0} \implies t_0 = \frac{\ell_0}{v_0}.$$

Z równań (6.12) otrzymujemy

$$\varrho_0 \frac{v_0}{t_0} = \varrho_0 f_0 \implies \frac{f_0 \ell_0}{v_0^2} = 1 \tag{6.13a}$$

$$\varrho_0 \frac{v_0}{t_0} = \frac{p_0}{\ell_0} \implies \frac{p_0}{v_0^2 \varrho_0} = 1 \tag{6.13b}$$

$$\varrho_0 \frac{v_0}{t_0} = \eta_0 \frac{v_0}{\ell_0^2} \implies \frac{\eta_0}{v_0 \varrho_0 \ell_0} = 1 \tag{6.13c}$$

$$\varrho_0 f_0 = \frac{p_0}{\ell_0} \implies \frac{\varrho_0 f_0 \ell_0}{p_0} = 1 \tag{6.13d}$$

Mamy cztery związki pomiędzy siedmioma stałymi. Możemy zatem cztery stałe wyznaczyć w zależności od trzech pozostałych, na przykład:

$$\begin{array}{ll} v_0 = \dfrac{\eta_0}{\varrho_0 \ell_0}\,, & t_0 = \dfrac{\ell_0^2 \varrho_0}{\eta_0} \\ p_0 = \dfrac{\eta_0^2}{\varrho_0 \ell_0^2}\,, & f_0 = \dfrac{\eta_0^2}{\varrho_0^2 \ell_0^3} \end{array} \tag{6.14}$$

Przy takim wyborze stałych równania (6.6) oraz (6.7) są równocześnie spełnione
`Co kończy dowód.` ■

Rozważając dwa ciała geometrycznie podobne, niech ich wymiary będą scharakteryzowane przez ℓ_1 oraz ℓ_2 odpowiednio.

Ruchy płynów wokół ciał będą podobne jeżeli

$$\ell_2 = \ell_0 \ell_1\,, \quad t_2 = t_0 t_1\,, \quad \boldsymbol{v}_2 = v_0\, \boldsymbol{v}_1\,, \quad \varrho_2 = \varrho_0\, \varrho_1 \quad p_2 = p_0\, p_1 \quad \boldsymbol{f}_2 = f_0\, \boldsymbol{f}_1 \quad \eta_2 = \eta_0\, \eta_1$$

Stąd i z (6.14) wynikają związki

$$\begin{array}{llll} & \dfrac{t_1}{\ell_1} v_1 = \dfrac{t_2}{\ell_2} v_2\,, & & \dfrac{p_1}{\varrho_1 v_1^2} = \dfrac{p_2}{\varrho_2 v_2^2} \\ (F) & \dfrac{v_1^2}{\ell_1 f_1} = \dfrac{v_2^2}{\ell_2 f_2}\,, & & \dfrac{\varrho_1 v_1 \ell_1}{\eta_1} = \dfrac{\varrho_2 v_2 \ell_2}{\eta_2} \qquad (R_e) \end{array}$$

Pozwala to stwierdzić, że jeżeli dwa przepływy scharakteryzowane tymi samymi (niemianowanymi) liczbami

$$\begin{aligned} &\text{liczbą Froude'a} \qquad F := \frac{v_1^2}{\ell_1 f_1} = \frac{v_2^2}{\ell_2 f_2}, \\ &\text{liczbą Reynoldsa} \qquad R_e := \frac{\varrho_1 v_1 \ell_1}{\eta_1} = \frac{\varrho_2 v_2 \ell_2}{\eta_2} \end{aligned}$$

to przepływy są podobne.

6.5. Siła oporu działajacą na kulkę powoli poruszajacą się w cieczy lepkiej.

Rozważmy swobodny (pod nieobecność zewnętrznych sił objętościowych) ruch stacjonarny ($\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = 0$) cieczy nieściśliwej ($\mathtt{div}\ \boldsymbol{v} = 0$) dla małych liczb Reynoldsa.

Równanie Naviera-Stokesa $\varrho(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = -\mathtt{grad}\, p + \eta\Delta\, \boldsymbol{v}$ możemy uprościć do równania liniowego. Mianowicie wyraz $(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}$ jest rzędu wielkosci v^2/ℓ, natomiast $\left(\frac{\eta}{\varrho}\right)\triangle\boldsymbol{v}$ jest rzędu $\eta v/(\varrho\ell^2)$. Liczba Reynoldsa $\mathtt{R} = \frac{\varrho v \ell}{\eta}$ jest zatem stosunkiem pierwszej wielkosci do drugiej. Jezeli z założenia $R \ll 1$, to mozna zaniedbać wyraz $(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}$ otrzymując

$$-\mathtt{grad}\, p + \eta\triangle\boldsymbol{v} = 0 \tag{6.15}$$

Wyjściowy problem jednostajnego prostoliniowego ruchu kulki w cieczy i znalezienia siły oporu rozwiążemy w trzech krokach:

1. znajdziemy rozkład prędkości cieczy,
2. znajdziemy rozkład tensora naprężeń na powierzchni kulki,
3. całkując odpowiednie składowe naprężenia po powierzchni kulki znajdziemy wypadkową siłę oporu lepkiego.

Zagadnienie ruchu kuli z prędkością $\boldsymbol{u} = const$ w nieruchomej cieczy, po przejściu do układu odniesienia współporuszającego się z kulką (początek układu współrzednych obieramy w środku kuli) jest równoważne z zagadnieniem opływu nieruchomej kuli przez strumień cieczy o zadanej w nieskończonosci predkosci $\boldsymbol{u}$. Pozwala to rozpatrywać stacjonarny rozkład pola prędkości $\boldsymbol{v}$. Jesli ruch ma być stacjonarny, należy mówić o opływaniu kuli przez ciecz, ponieważ gdy kula sie porusza, prędkość cieczy w każdym punkcie przestrzeni zmienia sie w czasie.

Krok 1. Rozkład prędkości cieczy. Sformułowanie problemu: chcemy znaleźć rozwiązanie układu równań różniczkowych

$$-\mathtt{grad}\, p + \eta\triangle\boldsymbol{v} = 0 \tag{6.16}$$

$$\mathtt{div}\, \boldsymbol{v} = 0 \tag{6.17}$$

opisujący stacjonarny ruch nieściśliwej cieczy lepkiej dla małych liczb Reynoldsa na zewnątrz kulki o promieniu r_0. Aby otrzymać jednoznaczne rozwiązanie musimy zadać warunki brzegowe na powierzchni kuli $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - r_0^2 = 0\}$ oraz w nieskończoności gdy $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \longrightarrow \infty$

$$\boldsymbol{v}|_S = 0$$

$$\lim_{r\to\infty} \boldsymbol{v}$$

Rozpocznijmy od równania ciągłości $\mathtt{div}\, \boldsymbol{v} = 0$. Ponieważ $\boldsymbol{u}$ jest stałym wektorem to $\mathtt{div}\ \boldsymbol{u} = 0$, zatem

$$0 = \mathtt{div}\, \boldsymbol{v} - \mathtt{div}\, \boldsymbol{u} = \mathtt{div}\, (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \tag{6.18}$$

Najogólniejszym rozwiązaniem tego równania jest

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} = \mathtt{rot}\boldsymbol{A} \tag{6.19}$$

gdzie $\boldsymbol{A}(x_1, x_2, x_3)$ jest dowolnym polem wektorowym. Aby spełnić warunki brzegowe (6.18 w szczególności w nieskończoności musi zachodzić

$$\mathtt{rot}\,\boldsymbol{A}|_{r\to\infty} = 0 \quad \text{gdzie} \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Analiza symetrii układu. Aby rozwiązać pierwsze równanie (6.16) wykorzystajmy warunki symetrii.

— W tym zagadnieniu opływanym ciałem jest kula czyli obiekt symetryczny na obroty - żaden z kierunków oprócz kierunku prędkości $\boldsymbol{u}$ nie jest wyróżniony.

— Wektor $\boldsymbol{A}$ powinien byc wektorem osiowym[1], aby jego rotacja, (patrz wzór (6.19)) podobnie jak predkość, była wektorem biegunowym[2].

— Wektor $\boldsymbol{A}$ powinien również zależeć w sposób liniowy od $\boldsymbol{u}$, ze wzgledu na liniowosc równania ruchu oraz jego warunków brzegowych.

Ogólna postac funkcji wektorowej $\boldsymbol{A}(x_1, x_2, x_3)$ spełniajaca powyższe trzy warunki jest postaci

$$\boldsymbol{A}(x_1, x_2, x_3) = g(r)(\boldsymbol{e_r} \times \boldsymbol{u})$$

gdzie $g(r)$ jest dowolną funkcją zmiennej $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ zaś $\boldsymbol{e_r}$ jest wektorem jednostkowym skierowanym w kierunku promienia wodzacego $\boldsymbol{r}$. Z dowolności $g(r)$ (będziemy chcieli dopiero ją wyznaczyć) możemy przyjąć, że $g(r) = \dfrac{df}{dr}$ jest pochodną innej szukanej funkcji. Wtedy $\dfrac{df}{dr}\boldsymbol{e_r} = \mathtt{grad}\,f$ i mamy $\boldsymbol{A} = \mathtt{grad}\,f \times \boldsymbol{u}$. Zatem ostatecznie rozwiązaniem równania ciągłości jest

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \mathtt{rot}\,[\mathtt{grad}\,f \times \boldsymbol{u}] \quad \text{gdzie} \quad f = f(r) \tag{6.20}$$

Zauważmy, że[3] $\mathtt{grad}\,f \times \boldsymbol{u} = \mathtt{rot}(f\boldsymbol{u})$.

W nieskończoności gdy $r \to \infty$ $\mathtt{rot}\,[\mathtt{grad}\,f \times \boldsymbol{u}]$ musi znikać. Oznacza to że dla $r \to \infty$ $\boldsymbol{A} = \mathtt{rot}(f\boldsymbol{u}) = \mathtt{grad}h$

Spełniliśmy zatem drugie równanie układu (6.16) i drugi warunek brzegowy. Rozpatrzmy teraz pierwsze równanie. Dokonajmy rotacji obu stron ($\mathtt{rot}\,\mathtt{grad}\,p = 0$)

$$0 = \eta\mathtt{rot}\,\triangle\,\boldsymbol{v} = \eta\triangle\,\mathtt{rot}\,\boldsymbol{v} = \eta\triangle\,\mathtt{rot}\,(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \tag{6.21}$$

Podstawiamy $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ ze wzoru (6.20) wtedy $\mathtt{rot}\,\{\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\} = \mathtt{rot}\,\{\mathtt{rot}\,[\mathtt{grad}\,f \times \boldsymbol{u}]\} = \mathtt{rot}\{\mathtt{rot}\,[\mathtt{rot}(f\boldsymbol{u})]\}$ Ale[4] dla dowolnego pola wektorowego $\boldsymbol{A}$

$$\mathtt{rot}\,\{\mathtt{rot}\boldsymbol{A}\} = (\mathtt{grad}\,\mathtt{div}\boldsymbol{A} - \triangle\boldsymbol{A})$$

Podstawiając $\boldsymbol{A} = \mathtt{rot}(f\boldsymbol{u})$ otrzymujemy

$$\mathtt{rot}\,\{\mathtt{rot}[\mathtt{rot}(f\boldsymbol{u})]\} = \mathtt{grad}\,\mathtt{div}[\mathtt{rot}(f\boldsymbol{u})] - \triangle\mathtt{rot}(f\boldsymbol{u})$$

---

[1]

[2]

[3] wektor $\boldsymbol{u}$ jest stały zatem $(\partial_i f)u_j = \partial_i(fu_j)$ stąd

$$\mathtt{grad}\,f \times \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} (\partial_y f)\,u_z - (\partial_z f)\,u_y \\ (\partial_z f)\,u_x - (\partial_x f)\,u_z \\ (\partial_x f)\,u_y - (\partial_y f)\,u_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_y(f\,u_z) - \partial_z(f\,u_y) \\ \partial_z(f\,u_x) - \partial_x(f\,u_z) \\ \partial_x(f\,u_y) - \partial_y(f\,u_x) \end{bmatrix} = \mathtt{rot}(f\boldsymbol{u})$$

[4] patrz uzupełnienia na końcu rozdziału

Ponieważ $\mathtt{div}[\mathtt{rot}(f\boldsymbol{u})] = 0$ stąd

$$\mathtt{rot}\,\{\mathtt{rot}[\mathtt{rot}(f\boldsymbol{u})]\} \;=\; -\triangle\,\mathtt{rot}(f\boldsymbol{u}) \;=\; -\triangle\,(\mathtt{grad}\,f \times \boldsymbol{u}) \tag{6.22}$$

Ostatecznie równanie (6.21) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} 0 = \eta\triangle\,\mathtt{rot}\boldsymbol{v} &= \eta\triangle\,\mathtt{rot}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \\ &= \eta\triangle\,[-\triangle\,(\mathtt{grad}\,f \times \boldsymbol{u})] \\ &= -\eta[\triangle\,\triangle\,(\mathtt{grad}\,f)] \times \boldsymbol{u} \end{aligned}$$

Stąd wynika

$$\triangle\,\triangle\,(\mathtt{grad}\,f) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \mathtt{grad}\,\triangle^2 f = 0$$

Całkując otrzymujemy $\triangle^2 f = const$. Stała ta na mocy warunku brzegowego w nieskończoności powinna byc równa zeru. Rzeczywiscie, róznica $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ powinna znikać w nieskonczoności wraz ze swoimi pochodnymi. Wyrażenie $\triangle^2 f$ zawiera czwarte pochodne funkcji f podczas gdy $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ wyraża się przez $\mathtt{rot}[\mathtt{rot}(f\boldsymbol{u})]$ czyli drugie pochodne.

Otrzymujemy zatem

$$0 = \triangle^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\triangle f}{dr}\right)$$

gdzie Laplasjan $\triangle$ wyraziliśmy we współrzędnych sferycznych[5] i skorzystaliśmy z faktu, że f oraz $\triangle f$ są funkcjami jedynie zmiennej r. Stąd

$$r^2\frac{d\triangle f}{dr} = const =: -2a \quad\Longrightarrow\quad \triangle f = \frac{2a}{r} + c.$$

Stałą c należy przyjąć równą zeru, aby predkosc $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ znikała w nieskonczoności. Całkujac powyższe równanie, otrzymamy

$$f = ar + \frac{b}{r} + \underbrace{const}_{0}$$

addytywna stała w f jest nieistotna jako, że predkość określona jest pochodnymi f i może mieć dowolną wartość np. zero. Znając postać funkcji f możemy z równości (6.20) wyznaczyć prędkość. Dokonamy tego we współrzędnych sferycznych (r, θ, φ) (czyli w bazie $(\boldsymbol{e_r}, \boldsymbol{e_\theta}, \boldsymbol{e_\varphi})$ wektorów stycznych)

$$\begin{aligned} \mathtt{grad}\,f &= \frac{\partial f}{\partial r}\,\boldsymbol{e_r} = (a - \frac{b}{r^2})\boldsymbol{e_r} \\ \boldsymbol{u} &= (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e_r})\boldsymbol{e_r} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e_\theta})\boldsymbol{e_\theta} \;=\; u\cos\theta\,\boldsymbol{e_r} \;-\; u\sin\theta\,\boldsymbol{e_\theta} \qquad \text{gdzie}\;\; u = \|\,\boldsymbol{u}\,\| \\ \mathtt{grad}\,f \times \boldsymbol{u} &= (a - \frac{b}{r^2})u\cos\theta\,\underbrace{\boldsymbol{e_r}\times\boldsymbol{e_r}}_{0} - u\sin\theta\,(a - \frac{b}{r^2})\,\underbrace{\boldsymbol{e_r}\times\boldsymbol{e_\theta}}_{\boldsymbol{e_\varphi}} \\ &= -u\sin\theta\,(a - \frac{b}{r^2})\,\boldsymbol{e_\varphi} \end{aligned}$$

[5] Postać Laplasjanu we współrzędnych sferycznych - porównaj (2.23d)

$$\triangle\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial^2\varphi}$$

Zatem[6]

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u} &= \mathtt{rot}\,[\mathtt{grad}\,f\times\boldsymbol{u}] \\
&= \boldsymbol{e_r}\,\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(-u\sin^2\theta(a-\frac{b}{r^2}))}{\partial\theta}\right]+\boldsymbol{e_\theta}\,\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(u\sin\theta\, r(a-\frac{b}{r^2})\right)\right]
\end{aligned}$$

Po wykonaniu różniczkowań

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{u}-2\frac{u\cos\theta}{r}\left(a-\frac{b}{r^2}\right)\boldsymbol{e_r}+\frac{u\sin\theta}{r}\left(a+\frac{b}{r^2}\right)\boldsymbol{e_\theta} \\
&= \boldsymbol{u}-2\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e_r}}{r}\left(a-\frac{b}{r^2}\right)\boldsymbol{e_r}+\frac{-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e_\theta}}{r}\left(a+\frac{b}{r^2}\right)\boldsymbol{e_\theta} \\
&= (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e_r})\left[1-2\frac{1}{r}\left(a-\frac{b}{r^2}\right)\right]\boldsymbol{e_r}+(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e_\theta})\left[1-\frac{1}{r}\left(a+\frac{b}{r^2}\right)\right]\boldsymbol{e_\theta}
\end{aligned}$$

Jest to postać[7] pola prędkości cieczy przy stacjonarnym opływie kulki.

Pozostaje nam jedynie wyznaczyć wartości stałych a i b. Na powierzchni kulki $r=r_0$ prędkośc cieczy jest równa zero tzn. znikają obie składowe normalna i styczna:

$$\left\{\begin{array}{l} 1-2\dfrac{1}{r_0}\left(a-\dfrac{b}{r_0^2}\right)=0 \\ 1-\dfrac{1}{r_0}\left(a+\dfrac{b}{r_0^2}\right)=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{r_0}{2}=a-\dfrac{b}{r_0^2} \\ r_0=a+\dfrac{b}{r_0^2} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=\dfrac{3}{4}r_0 \\ b=\dfrac{1}{4}r_0^3 \end{array}\right.$$

Ostatecznie rozkład predkości cieczy opływającej nieruchomą kulę umieszczoną w początku układu współrzędnych

$$\boldsymbol{v}=\underbrace{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e_r})\left[1-\frac{\frac{3}{2}r_0}{r}+\frac{\frac{1}{2}r_0^3}{r^3}\right]\boldsymbol{e_r}}_{\text{składowa radialna}}+\underbrace{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e_\theta})\left[1-\frac{\frac{3}{2}r_0}{r}-\frac{\frac{1}{4}r_0^3}{r^3}\right]\boldsymbol{e_\theta}}_{\text{składowa transwersalna}}. \tag{6.23}$$

Ciecz napływa z nieskończoności z prędkością $\boldsymbol{u}$.

Krok 2. Rozkład tensora naprężeń.

W celu wyznaczenia ciśnienia do równania Naviera-Stokesa (6.16) wstawiamy znaleziony rozkład prędkości (6.23)

$$\mathtt{grad}\,p=\eta\triangle\,\boldsymbol{v}\;=\;\eta\triangle\,\mathtt{rot}\,\mathtt{rot}(f\boldsymbol{u})=\eta\triangle\,[\mathtt{grad}\,\mathtt{div}(f\boldsymbol{u})-\triangle(f\boldsymbol{u})]$$

---

[6] Rotacja we współrzędnych sferycznych - porównaj (2.23c)

$$\mathtt{rot}\,\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e_r}\,\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)+\boldsymbol{e_\theta}\,\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)+\boldsymbol{e_\varphi}\,\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)$$

[7] przy innym pogrupowaniu wyrazów możemy zapisać (porównaj Landau& Lifszyc)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{u}+\frac{a}{r}\left[-2u\cos\theta\boldsymbol{e_r}+u\sin\theta\boldsymbol{e_\theta}\right]+\frac{b}{r^3}\left[2u\cos\theta\boldsymbol{e_r}+u\sin\theta\boldsymbol{e_\theta}\right] \\
&= \boldsymbol{u}+\frac{a}{r}\left[-2u_r\boldsymbol{e_r}-u_\theta\boldsymbol{e_\theta}\right]+\frac{b}{r^3}\left[2u_r\boldsymbol{e_r}-u_\theta\boldsymbol{e_\theta}\right] \\
&= \boldsymbol{u}+\frac{a}{r}\left[-u_r\boldsymbol{e_r}-(u_r\boldsymbol{e_r}+u_\theta\boldsymbol{e_\theta})\right]+\frac{b}{r^3}\left[-(u_r\boldsymbol{e_r}+u_\theta\boldsymbol{e_\theta})+3u_r\boldsymbol{e_r}\right] \\
&= \boldsymbol{u}+\frac{a}{r}\left[-u_r\boldsymbol{e_r}-\boldsymbol{u}\right]+\frac{b}{r^3}\left[-\boldsymbol{u}+3u_r\boldsymbol{e_r}\right]
\end{aligned}$$

Lecz $\triangle^2 f = 0$ i mamy

$$\mathtt{grad}\, p = \eta\triangle\left[\mathtt{grad}\,\mathtt{div}\,(fu)\right] = \eta\triangle\left[\mathtt{grad}(\boldsymbol{u}\cdot\mathtt{grad} f)\right] = \mathtt{grad}\left[\eta\boldsymbol{u}\cdot\mathtt{grad}(\triangle f)\right]$$

skad

$$p = \eta\boldsymbol{u}\cdot\mathtt{grad}(\triangle f) + p_0$$

gdzie p_0 jest cisnieniem cieczy w nieskonczonosci. Podstawienie wyrazenia na f prowadzi do ostatecznego wyniku

$$p = p0..32unr2R(14)$$

Za pomoca otrzymanych wzorów mozna obliczyc siłe F cisnienia wywieranego na kule przez opływajaca ciecz (lub, co jest równowazne, siłe oporu, jaki napotyka poruszajaca sie w cieczy kula). W tym celu wprowadzimy współrzedne sferyczne o osi biegunowej skierowanej wzdłuz predkosci u. Wszystkie wielkosci na zasadzie symetrii beda wówczas funkcjami tylko promienia r i kata biegunowego . Jest oczywiste, ze siła F jest skierowana wzdłuz predkosci u. Wartosc bezwzgledna tej siły moze byc wyznaczona za pomoca równania

$$Pi = ..iknk = ni..iknk$$

Wyznaczajac z tego wzoru składowe (wzdłuz normalnej i stycznej do powierzchni) siły przyłozonej do elementu powierzchni kuli i rzutujac je na kierunek u, otrzymujemy

$$F = Z(..pcos + 0rrcos..0rsin)df(15)$$

gdzie całkuje sie po całej powierzchni kuli. Podstawiajac wyrazenia (12) do wzorów

$$0rr = 2vrr0r = 1rvr + vr..vr$$

otrzymujemy na powierzchni kuli rownosci

$$0rr = 00r = ..32Rusin$$

oraz wzór na cisnienie postaci

$$p = p0..3u2Rcos$$

Całka (15) sprowadza sie zatem do wyrazenia

$$F = 3u2RZdf$$

Ostatecznie otrzymujemy wzór Stokesa na siłe oporu działajaca na kule powoli poruszajaca sie w cieczy:

$$F = 6\pi\eta Ru$$

Uzupełnienia

1. Wyprowadzenie wzoru $\mathtt{rot}\,\{\mathtt{rot}\boldsymbol{A}\} = (\mathtt{grad}\,\mathtt{div}\boldsymbol{A} - \triangle\boldsymbol{A})$

$$\begin{aligned}
\mathtt{rot}\,\{\mathtt{rot}\boldsymbol{A}\} &= \begin{bmatrix} \partial_y\,(\mathtt{rot}\boldsymbol{A})_z - \partial_z(\mathtt{rot}\boldsymbol{A})_y \\ \partial_z(\mathtt{rot}\boldsymbol{A})_x - \partial_x(\mathtt{rot}\boldsymbol{A})_z \\ \partial_x(\mathtt{rot}\boldsymbol{A})_y - \partial_y(\mathtt{rot}\boldsymbol{A})_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_y\,(\partial_x A_y - \partial_y A_x) - \partial_z(\partial_z A_x - \partial_x A_z) \\ \partial_z(\partial_y A_z - \partial_z A_y) - \partial_x(\partial_x A_y - \partial_y A_x) \\ \partial_x(\partial_z A_x - \partial_x A_z) - \partial_y(\partial_y A_z - \partial_z A_y) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \partial_x\,(\partial_y A_y + \partial_z A_z) - (\partial_y^2 A_x + \partial_z^2 A_x) \\ \partial_y\,(\partial_x A_x + \partial_z A_z) - (\partial_z^2 A_y + \partial_x^2 A_y) \\ \partial_z\,(\partial_x A_x + \partial_y A_y) - (\partial_x^2 A_z + \partial_y^2 A_z) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \partial_x\,(\partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z) - (\partial_x^2 A_x + \partial_y^2 A_x + \partial_z^2 A_x) \\ \partial_y\,(\partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z) - (\partial_x^2 A_y + \partial_y^2 A_y + \partial_z^2 A_y) \\ \partial_z\,(\partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z) - (\partial_x^2 A_z + \partial_y^2 A_z + \partial_z^2 A_z) \end{bmatrix} \\
&= \mathtt{grad}\,(\mathtt{div}\boldsymbol{A}) - \triangle\,(\boldsymbol{A})
\end{aligned}$$

Rozdział 7

Uzupełnienie. Elementy teorii sprężystości

Rozważymy ciało mogące ulegać odkształceniom, wypełnione szczelnie materią. Pod wpływem czynników zewnętrznych (sił powierzchniowych, sił objętościowych, zmiany temperatury itp.) ciało to z konfiguracji pierwotnej (przed odkształceniem) przejdzie do konfiguracji aktualnej (po odkształceniu).

7.1. Odkształcenia

Dokonując opisu odkształcenia ciała pod wpływem przyłożonych sił zauważmy, że na ogół wszystkie punkty tego ciała zmieniają swoje położenie. Rozważmy zatem dowolny punkt A tego ciała opisany w wybranym uprzednio układzie współrzędnych przez wektor położenia $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Ten sam punkt ciała po odkształceniu przejdzie w położenie a o wektorze wodzącym $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$. Wektor

$$\boldsymbol{u} = \tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x} \tag{7.1}$$

nazywamy *wektorem przemieszczenia* (*wektorem odkształcenia*). Jego współrzędne mierzymy w jednostkach długości (np. w metrach).

Możliwe są dwa podejścia, w których odpowiednio wektor $\boldsymbol{u}$:

— wyraża przemieszczenie punktu materialnego, zajmującego przed odkształceniem położenie $a(x_1, x_2, x_3)$ - mówimy, że stosujemy opis Lagrange'a (opis materialny), lub

— wyraża przemieszczenie punktu materialnego, który po odkształceniu ciała zajmuje w przestrzeni położenie pokrywające się z punktem $A(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ - opis Eulera (tzw. opis przestrzenny).

Opis przestrzenny ma zastosowanie w mechanice płynów, tam też go na ogół stosowaliśmy. W teorii odkształceń, używanej w teoriach konstrukcji bardziej przydatny jest jednak opis materialny, gdyż warunki podparcia ciała (warunki brzegowe) są znane właśnie w konfiguracji nieodkształconej.

W obu opisach trzeba znać funkcje *jednoznacznie* wiążące ze sobą współrzędne $\tilde{x}_i$ oraz x_i:

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{x}}(x_1, x_2, x_3) \tag{7.2a}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \tag{7.2b}$$

Warunek jednoznaczności

$$\frac{\partial(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \tilde{x}_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{x}_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \tilde{x}_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \neq 0$$

jest matematycznym wyrazem fizycznego stwierdzenia o *nieprzenikalności materii*, cząstki znajdujące się pierwotnie w różnych punktach a, b po odkształceniu nie mogą znaleźć się w jednym punkcie A tzn. $\tilde{\boldsymbol{x}}(a) \neq \tilde{\boldsymbol{x}}(b)$.

Współrzędne wektora przemieszczenia u_1, u_2, u_3 są funkcjami położenia (współrzędnych x_i lub $\tilde{x}_i$). Zatem wektory $\boldsymbol{u}$ tworzą pole wektorowe przemieszczeń

$$\boldsymbol{u}(x_1, x_2, x_3) = \tilde{\boldsymbol{x}}(x_1, x_2, x_3) - \boldsymbol{x} \tag{7.3a}$$

$$\boldsymbol{u}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = \tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \tag{7.3b}$$

7.2. Tensor odkształcenia

Rozważmy dwa nieskończenie bliskie punkty o wektorze wodzącym między nimi równym dx_i. Po odkształceniu wektor wodzący pomiędzy tymi samymi punktami będzie równy $d\tilde{x}_i = dx_i + du_i$. Odległość między nimi jest równa

$$d\ell = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} \quad \longrightarrow \quad d\tilde{\ell} = \sqrt{d\tilde{x}_1^2 + d\tilde{x}_2^2 + d\tilde{x}_3^2}$$

Podstawiając $du_i = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k$ kwadrat odległości po odkształceniu $d\tilde{\ell}^2$ możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned}
d\tilde{\ell}^2 &= \sum_{i=1}^{3} d\tilde{x}_i^2 = \sum_{i=1}^{3} \left(dx_i + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{3} \left[dx_i^2 + 2 \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k dx_i + \left(\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \right)^2 \right] \\
&= \sum_{i=1}^{3} \left[dx_i^2 + 2 \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k dx_i + \sum_{k=1}^{3} \sum_{\ell=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} dx_k dx_\ell \right] \\
&= d\ell^2 + 2 \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k dx_i + \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \sum_{\ell=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} dx_k dx_\ell
\end{aligned}$$

Zauważmy, że w drugim składniku dokonujemy zwężenia (kontrakcji) elementu $dx_k dx_i$ symetrycznego na zamianę wskaźników $k \leftrightarrow i$ tzn. $dx_k dx_i = dx_i dx_k$. Stąd wynika

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k dx_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dx_k dx_i \,.$$

Ponadto w ostatnim wyrażeniu skorzystajmy z faktu, że wartość sumy nie zależy od nazwy indeksów po których sumujemy tzn.

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \sum_{\ell=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} dx_k dx_\ell = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \sum_{\ell=1}^{3} \frac{\partial u_\ell}{\partial x_k} \frac{\partial u_\ell}{\partial x_i} dx_k dx_i$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\begin{aligned}
d\tilde{\ell}^2 &= d\ell^2 + 2 \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k dx_i + \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \sum_{\ell=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} dx_k dx_\ell \\
&= d\ell^2 + 2 \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dx_k dx_i + \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \sum_{\ell=1}^{3} \frac{\partial u_\ell}{\partial x_k} \frac{\partial u_\ell}{\partial x_i} dx_k dx_i \\
&= d\ell^2 + 2 \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} u_{ik} dx_i dx_k
\end{aligned}$$

gdzie u_{ik} są współrzędnymi *tensora odkształceń Greena*

$$u_{ik} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \sum_{\ell=1}^{3} \frac{\partial u_\ell}{\partial x_i} \frac{\partial u_\ell}{\partial x_k} \right) . \tag{7.4}$$

Powyżej zastosowaliśmy opis materialny (Lagrange'a). Analogiczny rachunek w przypadku opisu przestrzennego (Eulera)prowadzi do *tensora odkształcenia Almansiego*

$$u_{ik} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \tilde{x}_k} + \frac{\partial u_k}{\partial \tilde{x}_i} - \sum_{\ell=1}^{3} \frac{\partial u_\ell}{\partial \tilde{x}_i} \frac{\partial u_\ell}{\partial \tilde{x}_k} \right) . \tag{7.5}$$

Wprowadzone wzory (7.4) i (7.5) opisujące tensory Greena i Almansiego odnoszą się do odkształceń dowolnie dużych, czyli tzw. odkształceń skończonych. Jak widać są one nieliniowymi funkcjami gradientów przemieszczeń, czyli pochodnych $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ lub $\frac{\partial u_i}{\partial \tilde{x}_k}$. Nieliniowość jest, na ogół źródłem bardzo dużych trudności rachunkowych. Odkształcenia skończone wykazują podatne materiały gumopodobne, tworzywa sztuczne, organiczne tkanki miękkie. W materiałach budowlanych odkształcenia są bardzo małe i stosowanie skończonych miar deformacji nie jest konieczne. Wówczas iloczyny gradientów przemieszczeń, występujące we wzorach (7.4) i (7.5), jako małe wielkości wyższego rzędu można pominąć. Mówi się wtedy o teorii kinematycznie liniowej. W dalszym ciągu założymy, że przemieszczenia a także ich pochodne względem współrzędnych, w porównaniu z wymiarami ciała są bardzo małe, tzn. $\tilde{x}_k \approx x_k$. W wyrażeniach (7.4) i (7.5) można wtedy pominąć ostatni wyraz jako wielkość małą drugiego rzędu i różnice pomiędzy opisem przestrzennym i materialnym znikają, a definicja tensora odkształcenia upraszcza się do postaci

$$u_{ik} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) . \tag{7.6}$$

Otrzymaną wielkość nazywamy *tensorem odkształcenia Cauchy'ego*

W każdym z trzech przypadków wprost z określenia wynika, że tensor odkształcenia jest symetryczny $u_{ik} = u_{ki}$.

Zadanie 7.1. Udowodnić, że każda z wielkości u_{ik} Greena, Almansiego i Cauchy'ego jest tensorem tzn. w przypadku ortogonalnych transformacji współrzędnych $x'_i = \sum_{k=1}^{3} \Lambda_{ik} x_k$ gdzie $\sum_{j=1}^{3} \Lambda_{ij}\Lambda_{jk} = \delta_{ik}$ transformuje się jak tensor

$$u'_{ik} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{\ell=1}^{3} \Lambda^{\mathbb{T}}_{ij} u_{j\ell} \Lambda_{\ell k}$$

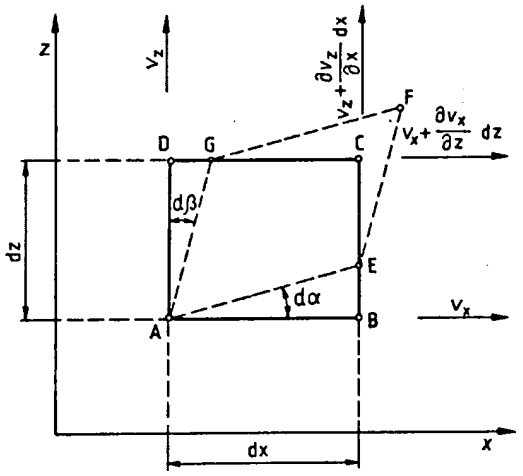
♠

7.3. Interpretacja geometryczna tensora odkształcenia.

Z symetrii tensora odkształcenia wynika, że ma on 6 niezależnych współrzędnych. Dodajmy, że wszystkie współrzędne tensora odkształcenia

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix}$$

są bezwymiarowe. W ramach liniowej teorii małych odkształceń współrzędne te mają czytelną interpretację geometryczną. Wykażemy, że współrzędne równo-wskaźnikowe (elementy na przekątnej) są odkształceniami liniowymi wzdłuż odpowiednich osi, a współrzędne różno-wskaźnikowe (poza przekątną) są odkształceniami kątowymi mierzonymi w płaszczyznach określonych indeksami współrzędnych.



Rysunek **7.1.** *Przemieszczenia infinitezymalnie bliskich punktów ośrodka.*

Aby się o tym przekonać, ograniczymy się do analizy płaskiej deformacji i zastosujemy opis materialny. Rozważmy w konfiguracji pierwotnej dwa elementarne prostopadłe do siebie odcinki ab i bc o mające odpowiednio długości dx_1 i dx_2. Po odkształceniu punkty materialne a, b, i c przemieszczą się i zajmą odpowiednio położenia A, B, i C. Wobec tego odcinki ab i bc zmienią swe pierwotne długości i nachylenia w stosunku do układu współrzędnych. Na podstawie rysunku określimy najpierw względne przyrosty długości boków, czyli tak zwane odkształcenia liniowe. Odkształcenia te wyrażają się stosunkiem przyrostu długości danego boku do jego pierwotnej długości. Obliczymy na przykład odkształcenia liniowe boku równoległego do osi Ox_1 pamiętając, że odkształcenia są małe w szczególności dla kątów oznacza to, że

$$\sin\alpha \approx \alpha \approx \tan\alpha \quad \wedge \quad \cos\alpha \approx 1$$
$$\sin\beta \approx \beta \approx \tan\beta \quad \wedge \quad \cos\beta \approx 1$$

Wydłużenie względne w kierunku osi Ox_1

$$\frac{|AB| - |ab|}{|ab|} = \frac{1}{dx_1}\left[\frac{1}{\cos\alpha}\left(dx_1 + u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1 - U_1\right) - dx_1\right] \approx \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

Analogicznie pochodne $\frac{\partial u_2}{\partial x_2}$, $\frac{\partial u_3}{\partial x_3}$ wyrażają odkształcenie liniowe (względne oddalenie cząstek) w kierunkach $0x_2$ i Ox_3 odpowiednio.

W pierwotnej konfiguracji cząstki a, b, c tworzyły kąt $\angle(cab) = \frac{\pi}{2}$. W wyniku odkształcenia punkty A, B, C tworzą na ogół inny kąt $\angle(CAB) = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)$. Całkowity kąt deformacji (w płaszczyźnie Ox_1x_2) wynosi

$$\alpha + \beta \approx \tan\alpha + \tan\beta = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}dx_1}{dx_1\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)} + \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}dx_2}{dx_2\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)} \approx \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

Ostatnia równość jest konsekwencją przyjętego przybliżenia liniowego.

Ananlogicznie $\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)$, $\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)$ stanowią kąty deformacji odpowiednio w płaszczyznach Ox_1x_3 i Ox_2x_3.

Aby określić całkowicie deformację musimy wyznaczyć jeszcze kąt obrotu dwusiecznej między bokami badanego elementu

$$\frac{\beta - \alpha}{2} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}\omega_3\delta t$$

7.4. Przykłady - odkształcenia proste.

Odkształceniem prostym nazywamy takie, które zależy tylko od jednej stałej.

1. Wydłużenie w kierunku osi Ox_1.
   Rozważmy deformację opisaną w pewnym układzie współrzędnych układem równań

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = (1+\varepsilon)x_1 \\ \tilde{x}_2 = x_2 \\ \tilde{x}_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \varepsilon x_1 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow [u_{ik}] = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Oś $0x_1$ jest kierunkiem głównym tensora odkształcenia odpowiadającym wartości własnej ε. Względna zmiana długości w tym kierunku wynosi zatem $(1+\varepsilon):1$. Dla $\varepsilon > 0$ wydłużenie, dla $\varepsilon < 0$ skrócenie. Pozostałe dwa kierunki (odpowiadające wartości włacnej zero) do dwa dowolne wzajemnie prostopadłe i prostopadłe do $0x_1$. Przy tym odkształceniu kula

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

   przechodzi w elipsoidę

$$\frac{x_1^2}{(1+\varepsilon)^2} + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

2. Wydłużenie w każdym kierunku.

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = (1+\varepsilon_I)x_1 \\ \tilde{x}_2 = (1+\varepsilon_{II})x_2 \\ \tilde{x}_3 = (1+\varepsilon_{III})x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \varepsilon x_1 \\ u_2 = \varepsilon_I x_2 \\ u_3 = \varepsilon_{III} x_3 \end{cases} \Rightarrow [u_{ik}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{bmatrix}$$

   Biorąc prostopadłościan $dV = dx_1dx_2dx_3$ po odkształceniu otrzymamy $d\tilde{V} = (1+\varepsilon_I)(1+\varepsilon_{II})(1+\varepsilon_{III})dx_1dx_2dx_3$ Względna zmiana objętości

$$\frac{d\tilde{V} - dV}{dV} = (1+\varepsilon_I)(1+\varepsilon_{II})(1+\varepsilon_{III}) - 1 = 1 + \varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III} + \varepsilon_I\varepsilon_{II} + \varepsilon_I\varepsilon_{III} + \varepsilon_I\varepsilon_{II}\varepsilon_{III} - 1$$

   W liniowym przybliżeniu (pomijając wszystkie iloczyny odkształceń otrzymujemy

$$\frac{d\tilde{V} - dV}{dV} = \varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III} = 3\varepsilon_0$$

   Gdzie ε_0 jest średnim odkształceniem liniowym. Przypomnijmy, że suma elementów na przekątnej (ślad macierzy) jest niezmiennikiem transformacji $O^T u O$ (O jest tutaj macierzą ortogonalną przejścia od jednejbazy do drugiej) czyli ma tę samą wartość w każdym układzie współrzędnych prostokątnych

3. Skręcenie proste w płaszczyźnie $0x_1x_2$
   Rozważmy deformację opisaną w pewnym układzie współrzędnych układem równań

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = x_1 + \varepsilon x_2 \\ \tilde{x}_2 = x_2 + \varepsilon x_1 \\ \tilde{x}_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \varepsilon x_2 \\ u_2 = \varepsilon x_1 \\ u_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow [u_{ik}] = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Względna zmiana objętości równa $Tr[u_{ik}] = \sum_k u_{kk} = 0$, czyli odkształcenie z zachowaniem objętości.
   W przekroju $x_3 = const$, kwadrat o wierzchołkach

$$A(-a,-a,x_3), \quad B(-a,a,x_3), \quad C(a,a,x_3), \quad D(a,-a,x_3)$$

   przejdzie w równoległobok o wierzchołkach

$$\tilde{A}(-(1+\varepsilon)a, -(1+\varepsilon)a, x_3), \quad \tilde{B}(-a(1-\varepsilon), a(1-\varepsilon), x_3), \quad \tilde{C}(a(1+\varepsilon), a(1+\varepsilon), x_3), \quad \tilde{D}(a(1-\varepsilon), -a(1-\varepsilon), x_3)$$

Oś $0x_1$ w oś o tangensie kąta nachylenia równym ε, oś $0x_2$ w oś tangensie kąta nachylenia równym $\frac{1}{\varepsilon}$. W ramach kinematycznie liniowej teorii małych odkształceń, w której $\alpha \sim \operatorname{tg}\alpha$, całkowity kąt odkształcenia wynosi 2ε.
Układ osi głównych jest obrócony względem wyjściowego o kąt $\varphi_0 = \frac{1}{2}\mathtt{arctg}\,\frac{2\varepsilon}{0-0} = \frac{\pi}{4}$. W układzie osi głównych

$$[u_{ik}] = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozkład tensora odkształcenia na aksjator i dewiator. Każdy symetryczny tensor drugiego rzędu można rozłożyć na dwie części

$$u_{ij} = u_{ij}^{(a)} + u_{ij}^{(d)}\,, \tag{7.7}$$

gdzie $u_{ij}^{(a)} = \varepsilon_0\delta_{ij}$, $\varepsilon_0 = \frac{1}{3}\left(u_{11} + u_{22} + u_{33}\right) = \frac{1}{3}I_1$ (I_1-jest pierwszym niezmiennikiem tensora $\hat{u}$). W wyrażeniu 7.7) $u_{ij}^{(d)}$ jest dewiatorem, natomiast $u_{ij}^{(a)}$ aksjatorem. Współrzędne tych wielkości przedstawiają macierze:

$$\left[u_{ik}^{(a)}\right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{bmatrix}, \quad \left[u_{ik}^{(d)}\right] = \begin{bmatrix} u_{11} - \varepsilon_0 & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} - \varepsilon_0 & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} - \varepsilon_0 \end{bmatrix}$$

Dla tensora odkształceń aksjator odpowiada równomiernej zmianie długości wzdłuż każdej z osi. Wiąże się to ze zmianą objętości

$$\frac{d\tilde{V} - dV}{dV} = 3\varepsilon_0$$

(dla tensora naprężeń wszechstronnemu rozciąganiu (ściskaniu) średnim naprężeniem normalnym ε_0). Aksjator jest więc określony tylko przez jedną wartość ε_0. Cechą charakterystyczną dewiatora jest natomiast zerowanie się pierwszego niezmiennika $I_1^{(d)} = 0$ czyli opisuje on odkształcenie odbywające się bez zmiany objętości. Dewiator ma wobec tego 5 niezależnych współrzędnych, bowiem na 6 współczynników $u_{ij}^{(d)}$ nałożony jest jeden warunek.

Aby udowodnić coś ciekawego rozłóżmy tensor odkształcenia zapisany w osiach głównych

$$\begin{bmatrix} u_I & 0 & 0 \\ 0 & u_{II} & 0 \\ 0 & 0 & u_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_I^{(d)} & 0 & 0 \\ 0 & u_{II}^{(d)} & 0 \\ 0 & 0 & u_{III}^{(d)} \end{bmatrix}$$

gdzie $u_I^{(d)} = u_I - \varepsilon_0$ itd. Stąd $u_I^{(d)} + u_{II}^{(d)} + u_{III}^{(d)} = 0$ czyli przykładowo $u_{II}^{(d)} = -u_I^{(d)} - u_{III}^{(d)}$. Co pozwala zapisać

$$\begin{bmatrix} u_I & 0 & 0 \\ 0 & u_{II} & 0 \\ 0 & 0 & u_{III} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{bmatrix}}_{\text{aksjator}} + \underbrace{\begin{bmatrix} u_I^{(d)} & 0 & 0 \\ 0 & -u_I^{(d)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{odkształcenie proste}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -u_{III}^{(d)} & 0 \\ 0 & 0 & u_{III}^{(d)} \end{bmatrix}}_{\text{odkształcenie proste}}$$

Zadanie 7.2. Dane są składowe stanu odkształcenia: $u_{11} = 0,4\%$, $u_{12} = 0,2\%$, $u_{13} = 0$, $u_{22} = 0$, $u_{23} = 0,1\%$, $u_{33} = -0,1\%$. Obliczyć zmianę objętości oraz maksymalne odkształcenie liniowe i maksymalne odkształcenie kątowe. ♠

`Rozwiązanie.` Tensor odkształcenia można przedstawić w postaci macierzy:

$$u = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & -0,1 \end{bmatrix} \quad [\%] \quad \Longrightarrow \quad u = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \left[10^{-1}\%\right]$$

Największe odkształcenie liniowe to największe odkształcenie główne u_I. Do obliczenia wartości głównych służy równanie charakterystyczne

$$\det\left[u_{ik} - \varepsilon\delta_{ik}\right] = \det \begin{bmatrix} u_{11} - \varepsilon & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} - \varepsilon & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} - \varepsilon \end{bmatrix} = -\varepsilon^3 + I_1\varepsilon^2 - I_2\varepsilon + I_3 = 0$$

gdzie I_1, I_2, I_3 oznaczają niezmienniki tensora odkształcenia:

$$I_1 = \texttt{trace}\left[u_{ik}\right] = u_{11} + u_{22} + u_{33}\,, \quad I_2 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{11} & u_{13} \\ u_{31} & u_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{22} & u_{23} \\ u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \det\left[u_{ik}\right]$$

W zadaniu:

$$I_1 = \texttt{trace}\left[u_{ik}\right] = 4 + 0 + (-1) = 3 \ \left[10^{-1}\%\right],$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -9 \ \left[10^{-2}\,(\%)^2\right]$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ \left[10^{-3}\,(\%)^3\right]$$

Poszukiwana wartość .I jest największym pierwiastkiem równania: . 3 - 3. 2 - 9. - 0 = 0, skąd . (. 2 - 3. - 9) = 0 ♠

Rozdział 8

Zadania

W tym rozdziale zamieszczone są zadania, które pojawiły się już w głównym tekście jak i inne.

Zadania do rozdziału 2.

Zadanie 8.1. Napisać używając pisowni wskaźnikowej a następnie uprościć wyrażenia
— $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d})$,
— $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$,
— $[(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}]^2$,

Zadanie 8.2. Znaleźć krzywą całkową pola wektorowego $\boldsymbol{v}$ przez punkt $\boldsymbol{a}$ gdzie
(a) $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ oraz $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
(b) $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ oraz $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ■

Zadanie 8.3. Dana jest krzywa w postaci parametrycznej $\boldsymbol{x}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} e^{\varepsilon} + e^{2\varepsilon} + 4e^{3\varepsilon} \\ e^{2\varepsilon} + 4e^{3\varepsilon} \\ 4e^{3\varepsilon} \end{bmatrix}$. Znaleźć współrzędne wektora stycznego do krzywej w punkcie $\boldsymbol{x}\,|_{\varepsilon=\ln 2} = \begin{bmatrix} 38 \\ 36 \\ 32 \end{bmatrix}$. ■

Zadanie 8.4. Napisać używając pisowni wskaźnikowej
— $\mathtt{div}\,\boldsymbol{x}$,
— $\mathtt{div}\,[f(r)\boldsymbol{x}]$,
— $\mathtt{div}\,[f(r)\boldsymbol{a}]$,
— $\mathtt{grad}\,f(r)$,
— $\mathtt{grad}\,r$,
— $\mathtt{rot}\,\boldsymbol{x}$,
— $\mathtt{rot}\,[f(r)\boldsymbol{a}]$,

gdzie $\boldsymbol{a}$-wektor stały, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$-wektor wodzący (położenia), $r = \| \boldsymbol{x} \|$-długość wektora wodzącego.

Zadanie 8.5. Obliczyć używając pisowni wskaźnikowej
— $\mathtt{grad}\,[\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}]$,
— $\mathtt{grad}\,[\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}]$,
— $\mathtt{grad}\,[uv]$,
— $\mathtt{div}\,[\boldsymbol{a}v]$,
— $\mathtt{div}\,[u\boldsymbol{v}]$
gdzie $\boldsymbol{a}$-wektor stały, $u, v, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ funkcje położenia $\boldsymbol{x}$.

Zadania do rozdziału 3.

Zadanie 8.6. Udowodnić, że tensor napięć jest tensorem symetrycznym. ■

Zadanie 8.7. Udowodnić następujące *twierdzenie spektralne* (inaczej *tw. o osiach głównych*): warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby tensor posiadał trzy wzajemnie protopadłe kierunki niezmienne (własne) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ jest aby tensor był symetryczny. ■

Zadanie 8.8. Stężenie zanieczyszczeń w płynie jest opisane przez

$$c(x, y, t) = \beta x^2 y e^{-\alpha t}\,.$$

Płyn porusza się z prędkością $\boldsymbol{v}$ gdzie

$$v_1 = \alpha x\,, \qquad v_2 = -\alpha y\,, \qquad v_3 = 0\,.$$

Czy stężenie zanieczyszczeń elementu płynu zmienia się z czasem?

Zadanie 8.9. Znaleźć parcie (siłę ciśnienia) na zgiętym kawałku rury, przez którą przepływ ciecz nieściśliwa, a przepływ jest ustalony. ■

Zadanie 8.10. `Paradoks hydrostatyczny.` [3] Wyznaczyć rozkład ciśnienia w słupie cieczy. ■

Zadanie 8.11. Wyznaczyć kształt powierzchni swobodnej cieczy nieściśliwej znajdującej się w polu siły ciężkości w naczyniu cylindrycznym, które obraca się wokół swej osi ze stałą prędkością kątową ω. ■

Zadanie 8.12. `Prawo Archimedesa.` Wyprowadzić prawo wyporu Archimedesa. ■

Zadanie 8.13. `Paradoks hydrodynamiczny.` Wyznaczyć rozkład ciśnienia w ustalonym przepływie cieczy w rurze o malejącym polu przekroju poprzecznego (rurka Venturiego). ■

Zadania do rozdziału 4.

Zadanie 8.14. Obliczyć wirowość prędkości (we współrzędnych cylindrycznych)

— $\boldsymbol{v} = \dfrac{k}{r}\boldsymbol{e}_\varphi$

— $\boldsymbol{v} = \omega r \boldsymbol{e}_\varphi$

■

Zadanie 8.15. Rozważyć wir Rankina

$$v_\varphi = \begin{cases} \Omega r\,, & r < a \\ \dfrac{\Omega a^2}{r}\,, & r > a \end{cases}\,, \qquad v_r = v_z = 0.$$

Znaleźć ciśnienie wewnątrz i na zewnątrz wiru. (a) Pokazać, że ciśnienie dla $r = 0$ jest mniejsze niż ciśnienie dla $r = \infty$ o wielkość $\varrho\Omega^2 a^2$. (b) Wydedukować, że głębokość zagłębienia powierzchni swobodnej w $r = 0$ poniżej poziomu dla $r = \infty$ wynosi $\Omega^2 a^2/g$. (Przykładowo, powierzchnia wody w szklance). ■

Zadanie 8.16. Sprawdzić, że wielomiany (4.14) spełniają równanie

$$n(n+1)P_n(\mu) + \frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dP_n}{d\mu}\right] = 0. ■$$

Zadanie 8.17. `Potencjalny opływ kuli.` [1] Kula o promieniu R porusza się w nieściśliwej cieczy idealnej. Wyznaczyć rozkład prędkości wokół kuli i rozkład ciśnienia na powierzchni kuli. ■

Zadania do rozdziału 6.

Zadanie 8.18. Znaleźć rozkład prędkości stacjonarnego przepływu nieściśliwej cieczy lepkiej pomiędzy dwoma równoległymi nieskończonymi płaszczyznami poruszającymi się względem siebie z prędkością $\boldsymbol{u}$ odległymi od siebie o h. ■

Zadanie 8.19. Znaleźć rozkład prędkości stacjonarnego przepływu nieściśliwej cieczy lepkiej pomiędzy dwoma równoległymi nieskończonymi nieruchomymi płaszczyznami odległymi od siebie o h pod wpływem gradientu ciśnienia. ■

Zadanie 8.20. Znaleźć stacjonarny rozkład prędkości nieściśliwej cieczy lepkiej w cylindrycznej rurze o promieniu R i przepustowość rury (ilośc masy cieczy przepływającą w jednej sekundzie przez przekrój poprzeczny). ■

Zadanie 8.21. Znaleźć przepustowość rury i stacjonarny rozkład prędkości nieściśliwej cieczy lepkiej w rurze o przekroju pierścieniowym o promieniu wewnętrznym R_1 i zewnętrznym R_2. ■

Zadanie 8.22. Walec o promieniu R_1 porusza się równolegle do swej osi z prędkością $\boldsymbol{u}$ wewnątrz współosiowego z nim walca o promieniu R_2. Wyznaczyć ruch cieczy wypełniającej przestrzeń między tymi walcami. ■

Bibliografia

[1] L. Landau, E. Lifszyc: *Hydrodynamika*, PWN Warszawa 1993.
[2] L. Landau, E. Lifszyc: *Teoria sprężystości*, PWN Warszawa 1993.
[3] B. Średniawa, J. Weyssenhoff: *Mechanika środowisk rozciągłych* , PWN Warszawa 1969.
[4] A. K. Wróblewski: *Podstawy fizyki*, tom II, PWN Warszawa 1991.
[5] A. Karaśkiewicz: *Zarys teorii wektorów i tensorów*, PWN 1988.