



Politechnika Łódzka
Instytut Fizyki

Laboratorium laserów i ich wybranych zastosowań w fizyce

Ćwiczenie L02

Pomiar efektu Kerra w oleju mineralnym

Autorzy: Piotr Górski, Rafał Ledzion, Marek Izdebski

Wersja 1.0 (7 maja 2022)

Spis treści:

1. Cel ćwiczenia	3
2. Zagrożenia.....	3
3. Wstęp.....	3
4. Metoda pomiarowa.....	6
5. Układ pomiarowy	10
6. Przebieg pomiaru	12
7. Wskazówki do raportu	16
7. Literatura	20

Przed zapoznaniem się z instrukcją i przystąpieniem do wykonywania ćwiczenia należy opanować następujący materiał teoretyczny:

1. Opis efektu Kerra przy użyciu stałej Kerra oraz tensora kwadratowego efektu elektrooptycznego [1, 2].
2. Indykatrysa optyczna i jej wykorzystanie do wyznaczania współczynników załamania światła rozchodzącego się w zadanym kierunku w ośrodku anizotropowym [1].
3. Rozszerzona niepewność pomiarowa, poziom ufności, współczynnik rozszerzenia i jego wybór dla pomiarów o rozkładzie normalnym [3].

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest pomiar stałej Kerra wybranego oleju mineralnego. Zakres ćwiczenia obejmuje zestawienie układu pomiarowego, jego testowanie, ustawienie optymalnych orientacji elementów optycznych oraz przeprowadzenie pomiaru stałej Kerra w temperaturze pokojowej. Pomiar odbywa się dynamiczną metodą polaryzacyjno-optyczną, w której rejestrowana jest modulacja światła laserowego przechodzącego przez układ pomiarowy na częstotliwości dwukrotnie większej od częstotliwości sinusoidalnie zmiennego pola elektrycznego przyłożonego do próbki oleju.

2. Zagrożenia

Rodzaj	Brak	Małe	Średnie	Duże
zagrożenie elektryczne		+		
zagrożenie optyczne			+	
zagrożenie mechaniczne (w tym akustyczne, hałas)	+			
zagrożenie polem elektro-magnetycznym (poza widmem optycznym)	+			
zagrożenie biologiczne	+			
zagrożenie radioaktywne (jonizujące)	+			
zagrożenie chemiczne	+			
zagrożenie termiczne (w tym wybuch i pożar)	+			

Uwaga: w ćwiczeniu wykorzystywany jest laser o pracy ciągłej klasy 3B, emitujący światło czerwone o długości fali 632,8 nm i mocy wyjściowej do 15 mW. Zabronione jest kierowanie wiązki światła laserowego w stronę oczu.

3. Wstęp

W 1875 roku szkocki fizyk John Kerr odkrył, że ciecze optycznie izotropowe pod wpływem zewnętrznego pola elektrycznego przestają być izotropowe i stają się dwójłomne, przy czym oś optyczna jest wówczas równoległa do kierunku przyłożonego pola. Czas powstania i zaniku tego zjawiska w dielektryku jest rzędu 10^{-10} s. Zjawisko to nazwano elektrooptycznym efektem Kerra w cieczy.

W elektrooptycznym zjawisku Kerra różnicę współczynników załamania promienia zwyczajnego i nadzwyczajnego Δn zazwyczaj opisuje wzór:

$$\Delta n = \lambda K E^2, \quad (1)$$

gdzie: λ jest długością fali świetlnej, K – stałą Kerra oraz E – natężeniem zewnętrznego pola elektrycznego. Różnica wartości współczynników załamania promieni jest proporcjonalna do kwadratu natężenia przyłożonego pola elektrycznego i dlatego efekt Kerra jest nazywany elektrooptycznym efektem drugiego rzędu.

Efekt elektrooptyczny jest zwykle opisany poprzez zmiany składowych tensora nieprzenikalności elektrycznej dielektryka η_{ij} wywołane przyłożeniem zewnętrznego pola elektrycznego E_k :

$$\Delta \eta_{ij} = r_{jik} E_k + g_{ijkl} E_k E_l + \dots \quad (2)$$

Występujące tu współczynniki liniowego efektu elektrooptycznego r_{ijk} zdefiniowane są następująco:

$$r_{ijk} = \left(\frac{\partial \eta_{ij}}{\partial E_k} \right) \Big|_{E=0}, \quad (3)$$

gdzie r_{ijk} jest tensorem trzeciej rangi o symetrii wewnętrznej według symboliki Jahna $[V^2]V$, przy czym spełnia warunek: $r_{ijk} = r_{jik}$. W ciałach izotropowych jakimi są oleje, liniowy efekt elektrooptyczny nie występuje. Natomiast w ciałach izotropowych obecne są składowe kwadratowego efektu elektrooptycznego g_{ijkl} , zdefiniowane jako:

$$g_{ijkl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \eta_{ij}}{\partial E_k \partial E_l} \right) \Big|_{E=0}. \quad (3)$$

Noszą one nazwę kwadratowego współczynnika elektrooptycznego, nazywanego również współczynnikiem Kerra i są składowymi tensora czwartej rangi o symetrii wewnętrznej $[V^2][V^2]$. Tensor kwadratowego efektu elektrooptycznego g_{ijkl} w ośrodku izotropowym można zapisać w następującej postaci:

$$g_{ijkl} = \begin{bmatrix} g_{1111} & g_{1122} & g_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ g_{1122} & g_{1111} & g_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ g_{1122} & g_{1122} & g_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(g_{1111} - g_{1122}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(g_{1111} - g_{1122}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(g_{1111} - g_{1122}) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Jeżeli przyjąć, że $\frac{1}{2}(g_{1111} - g_{1122}) = g_{1212}$, wtedy składowe tensora nieprzenikalności elektrycznej można opisać wzorami:

$$\eta_{11} = \frac{1}{n^2} + g_{1111}E_1^2 + g_{1122}E_2^2 + g_{1122}E_3^2, \quad (5)$$

$$\eta_{22} = \frac{1}{n^2} + g_{1122}E_1^2 + g_{1111}E_2^2 + g_{1122}E_3^2, \quad (6)$$

$$\eta_{33} = \frac{1}{n^2} + g_{1122}E_1^2 + g_{1122}E_2^2 + g_{1111}E_3^2, \quad (7)$$

$$\eta_{12} = \eta_{21} = 2g_{1212}E_1E_2, \quad (8)$$

$$\eta_{13} = \eta_{31} = 2g_{1212}E_1E_3, \quad (9)$$

$$\eta_{32} = \eta_{23} = 2g_{1212}E_2E_3, \quad (10)$$

gdzie: n to współczynnik załamania światła w przypadku braku pola elektrycznego, E_i są to składowe wektora zewnętrznego pola elektrycznego.

Równanie indyktrisy optycznej:

$$X_i \eta_{ij} X_j = 1, \quad (11)$$

gdzie X_i są osiami prawoskrętnego układu kartezjańskiego, w nieobecności zewnętrznego pola elektrycznego ma postać:

$$\frac{X_1^2}{n^2} + \frac{X_2^2}{n^2} + \frac{X_3^2}{n^2} = 1. \quad (12)$$

W wyniku działania zewnętrznego pola elektrycznego równanie indyktrisy optycznej ulega zmianie. Jeśli przyjąć, że pole elektryczne przyłożone jest wzdłuż osi OX_2 , to tylko składowa E_2 będzie niezerowa. Dla $E_2 = E$ otrzymać można następujące równanie indyktrisy:

$$\left(\frac{1}{n^2} + g_{1122}E^2\right)X_1^2 + \left(\frac{1}{n^2} + g_{1111}E^2\right)X_2^2 + \left(\frac{1}{n^2} + g_{1122}E^2\right)X_3^2 = 1. \quad (13)$$

Jeżeli założyć, że światło rozchodzi się wzdłuż osi OX_3 , to dokonując cięcia indyktrisy płaszczyzną prostopadłą do tej osi ($X_3 = 0$) otrzymać można równanie elipsy w postaci:

$$\left(\frac{1}{n^2} + g_{1122}E^2\right)X_1^2 + \left(\frac{1}{n^2} + g_{1111}E^2\right)X_2^2 = 0. \quad (14)$$

Główne osie elipsy, która powstała po cięciu indyktrisy, wyznaczają współczynniki załamania światła po przejściu przez olej. Wynoszą one odpowiednio:

$$n_{X_1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + g_{1122}E^2}} \approx n \left(1 - \frac{1}{2}n^2 g_{1122}E^2\right), \quad (15)$$

$$n_{x_2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + g_{1111}E^2}} \approx n \left(1 - \frac{1}{2} n^2 g_{1111} E^2 \right). \quad (16)$$

Stąd zmiana współczynnika załamania światła, pod wpływem zewnętrznego pola elektrycznego wynosi:

$$\Delta n = n_{x_1} - n_{x_2} = \frac{1}{2} n^3 g_{\text{ef}} E^2, \quad (17)$$

gdzie: $g_{\text{ef}} = g_{1122} - g_{1111}$ (18)

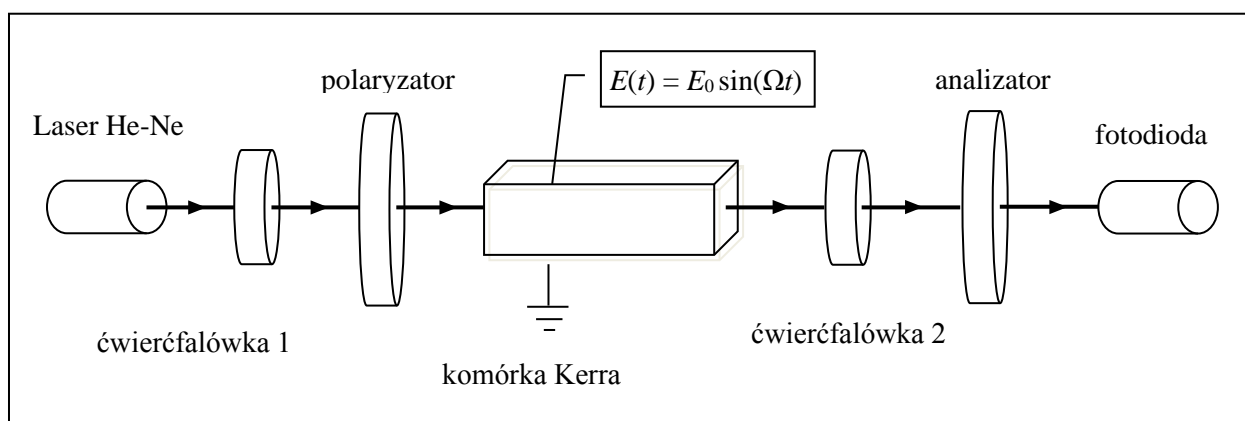
to tzw. efektywny kwadratowy współczynnik elektrooptyczny.

Poprzez porównanie wzorów (1) i (18) otrzymać można związek stałej Kerra K z efektywnym kwadratowym współczynnikiem elektrooptycznym g_{ef} :

$$K \lambda = \frac{1}{2} n^3 g_{\text{ef}}. \quad (19)$$

4. Metoda pomiarowa

W celu pomiaru indukowanej polem elektrycznym dwójłomności optycznej zwykle stosuje się tzw. dynamiczną, polaryzacyjno-optyczną metodę pomiaru. Polega ona na pomiarze natężenia światła z lasera helowo-neonowego o długości emitowanej fali $\lambda = 632,8$ nm, po przejściu promieni przez badany olej umieszczony w zewnętrznym, zmiennym sinusoidalnie polu elektrycznym w tzw. komórce Kerra oraz przez układ polaryzatorów i ćwierćfalówek ustawionych jak na rysunku 1.



Rys. 1. Schemat optycznego układu stosowanego w metodzie polaryzacyjno-optycznej.

Laser He-Ne wytwarza światło spolaryzowane liniowo. Aby otrzymać światło spolaryzowane kołowo umieszcza się w układzie ćwierćfalówkę 1. Nie jest ona jednak idealna, dlatego po przejściu przez nią światło jest nieznacznie spolaryzowane eliptycznie.

Natężenie światła I_w wychodzącego z układu pomiarowego opisuje wzór:

$$I_w = I_0 \left[\cos^2(\alpha) - \sin(2\beta) \sin(2(\beta - \alpha)) \sin^2\left(\frac{\Delta\Gamma}{2}\right) \right], \quad (20)$$

gdzie:

α jest kątem pomiędzy płaszczyzną polaryzacji światła polaryzatora i płaszczyzną polaryzacji analizatora, β jest kątem pomiędzy płaszczyzną polaryzacji światła polaryzatora i osią główną elipsy powstałej w wyniku cięcia indykatrixy optycznej płaszczyzną prostopadłą do wiązki światła, I_0 jest wartością natężenia światła na wejściu układu, zaś $\Delta\Gamma$ jest różnicą faz promienia zwyczajnego i nadzwyczajnego na wyjściu układu i może być zapisana w postaci:

$$\Delta\Gamma = \frac{2\pi L}{\lambda} \Delta n, \quad (21)$$

gdzie: L jest długością drogi optycznej w komórce Kerra.

Korzystając z zależności (1) zależność (21) można zapisać w postaci:

$$\Delta\Gamma = 2\pi L K E^2. \quad (22)$$

Z uwagi na fakt, że pole powierzchni S elektrod w komórce Kerra jest liczbowo wielokrotnie większe od odległości d pomiędzy elektrodami, to można założyć, że pole elektryczne w komórce Kerra jest jednorodne. Stąd:

$$E = \frac{U}{d}, \quad (23)$$

gdzie U to napięcie przyłożone do elektrod.

Wzór (22) opisać można zapisać w postaci:

$$\Delta\Gamma = 2\pi L K \frac{U^2}{d^2}. \quad (24)$$

Przyjmując, że polaryzator i analizator są ustawione tak, że $\alpha = 90^\circ$ i $\beta = 45^\circ$, to natężenie światła na wyjściu układu można zapisać zgodnie z (20) w postaci:

$$I_w = I_0 \sin^2 \frac{\Delta\Gamma}{2}. \quad (25)$$

W dynamicznej metodzie polaryzacyjno-optycznej przykładą się sinusoidalnie zmienne w czasie napięcie elektryczne o amplitudzie U_0 :

$$U = U_0 \sin(\Omega t). \quad (26)$$

W takim przypadku różnicę faz promienia zwyczajnego i nadzwyczajnego można zapisać jako sumę dwóch składników:

$$\Delta\Gamma = \Delta\Gamma^0 + \Delta\Gamma^E, \quad (27)$$

gdzie $\Delta\Gamma^0$ jest różnicą faz niezależną od pola elektrycznego, wynikającą z obecności ćwierćfalówki ($\Delta\Gamma^0 = 90^\circ (\pi/2)$), natomiast $\Delta\Gamma^E$ jest różnicą faz indukowaną przyłożonym zewnętrznym polem elektrycznym.

Stosując tożsamość trygonometryczną:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\alpha) \quad (28)$$

oraz zależności (24 - 27) można zapisać wzór na natężenie światła na wyjściu układu pomiarowego:

$$I_w = I_0 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left(\Delta\Gamma^0 + 2\pi L K \frac{U_0^2 \sin^2 \Omega t}{d^2} \right) \right], \quad (29)$$

gdzie U_0 jest amplitudą napięcia przyłożonego do elektrod.

Stosując tożsamości trygonometryczne (28) oraz:

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\sin \alpha, \quad (30)$$

a także fakt, że dla małych wartości kąta α :

$$\sin(\alpha) \cong \alpha, \quad (31)$$

wzór (29) można zapisać w postaci:

$$I_w = I_0 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \pi L K \frac{U_0^2}{d^2} - \frac{1}{2} \pi L K \frac{U_0^2}{d^2} \cos(2\Omega t) \right]. \quad (32)$$

Czyli na wyjściu układu pomiarowego pojawiają się dwie składowe natężenia światła, odpowiednio zależne od I^0 oraz zależne od $I_0^{2\Omega} \cos(2\Omega t)$:

$$I_w(t) = I^0 - I_0^{2\Omega} \cos(2\Omega t), \quad (33)$$

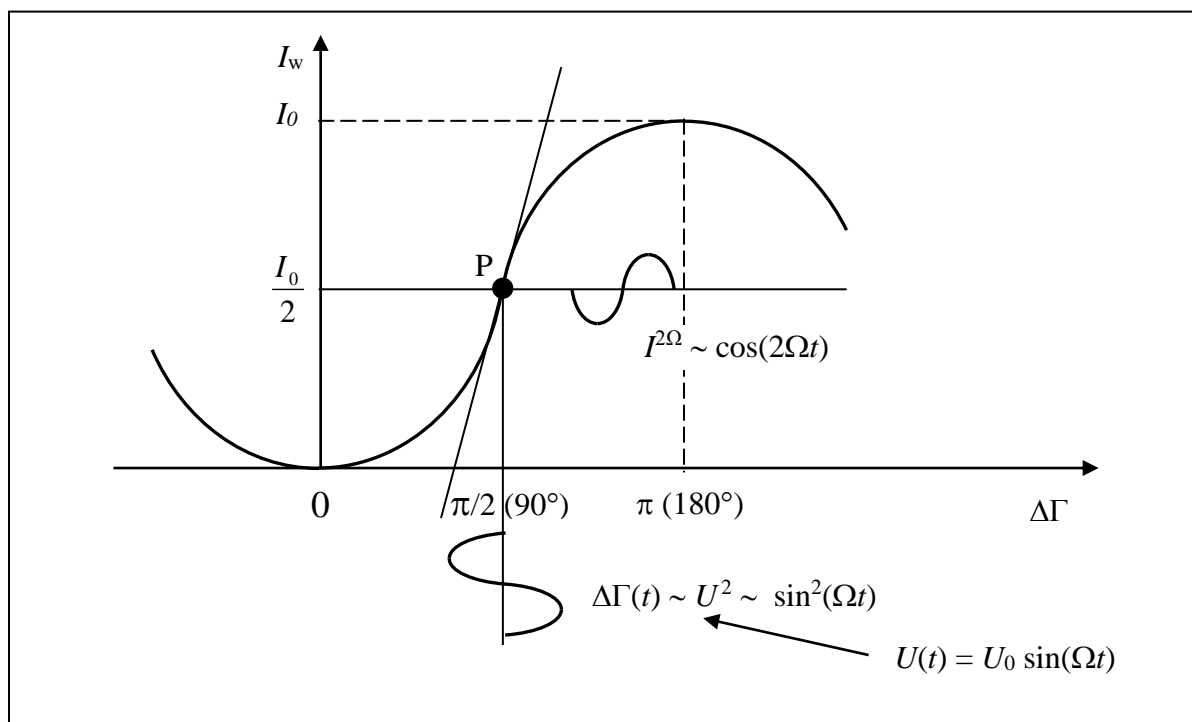
gdzie:

$$I^0 = I_0 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \pi L K \frac{U_0^2}{d^2} \right], \quad (34)$$

oraz

$$I_0^{2\Omega} = I_0 \left[\frac{1}{2} \pi L K \frac{U_0^2}{d^2} \right]. \quad (35)$$

Na rysunku 2 przedstawiono zmiany natężenia światła na wyjściu układu pomiarowego pracującego jako modulator elektrooptyczny po przyłożeniu do komórki Kerra sinusoidalnie zmiennego napięcia o amplitudzie U_0 i częstotliwości 2Ω . Z uwagi na obecność kwadratowego efektu elektrooptycznego, dla optymalnego miejsca modulacji (czyli w punkcie P, dla którego $\Delta\Gamma^0 = 90^\circ$ ($\pi/2$)), odpowiedź modulatora na sygnał o częstotliwości Ω pojawia się na częstotliwości 2Ω .



Rys. 2. Zależność natężenia światła przechodzącego przez układ przedstawiony na Rys. 1 od modulującego napięcia $U(t) = U_0 \cdot \sin(\Omega t)$. $I^0 \approx I_0/2$ oraz $I^{2\Omega}$ są odpowiednio stałą składową natężenia światła oraz składową zależną od modulującego pola. Rysunek przedstawia przypadek gdy modulator pracuje na liniowej części swojej charakterystyki, czyli w pobliżu punktu P, a napięcie modulujące zawiera tylko składową o częstotliwości Ω .

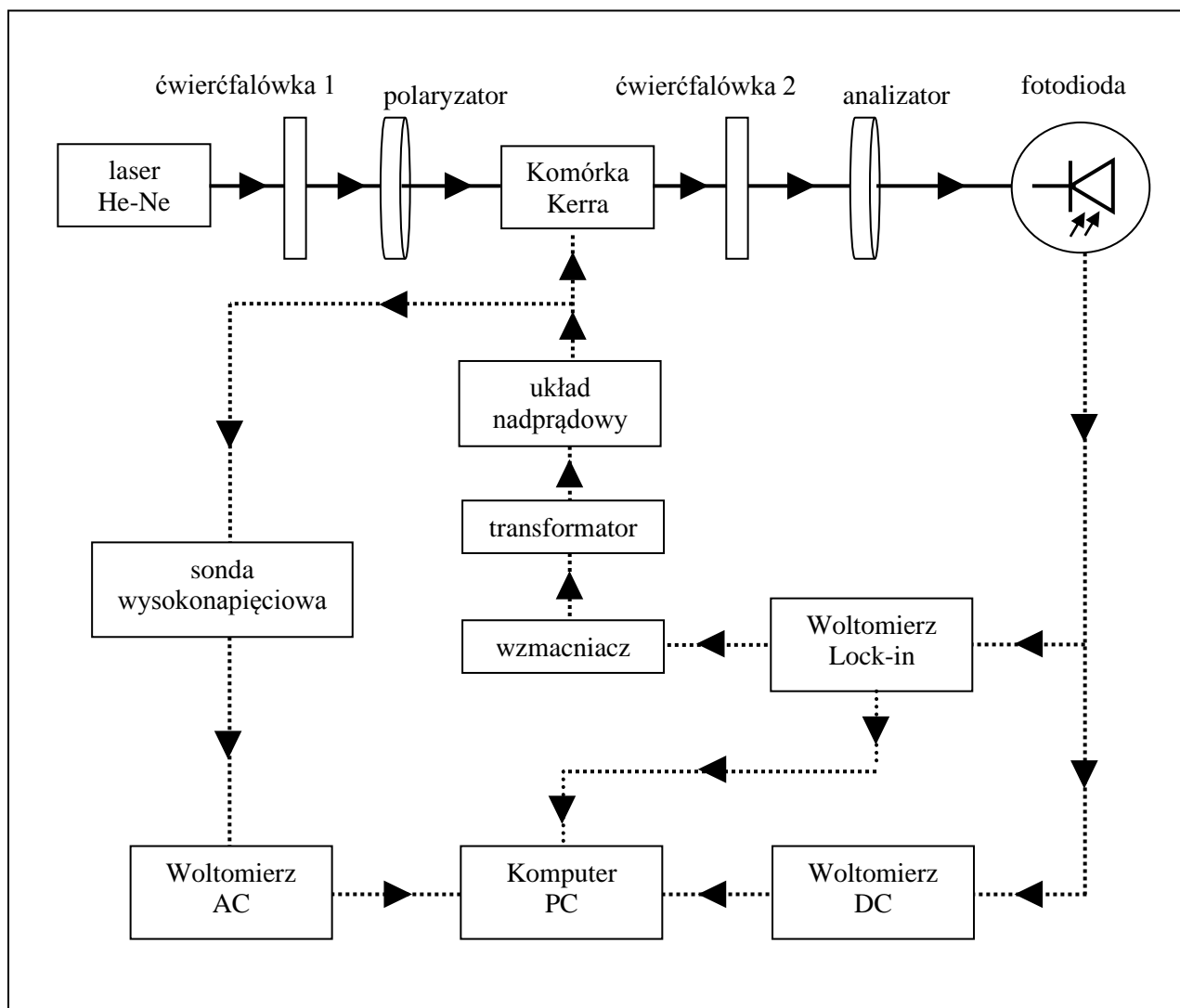
W okolicach punktu P zależność natężenia światła w funkcji indukowanego przesunięcia fazowego $\Delta\Gamma^E$ może być traktowana jako liniowa i opisana przez styczną poprowadzoną w tym punkcie. Zakłada się, że jest to optymalny punkt pracy modulatora i jego czułość w tym miejscu pracy jest najwyższa, a nieliniowe zniekształcenia są najmniejsze.

Zaletami dynamicznej metody polaryzacyjno-optycznej są wysoka czułość oraz możliwość kontrolowania i optymalizacji punktu pracy modulatora.

Najważniejszą wadą tej metody pomiarowej jest brak możliwości określenia znaku stałej Kerra.

5. Układ pomiarowy

Schemat pełnego układu pomiarowego przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Schemat elektryczny układu pomiarowego.

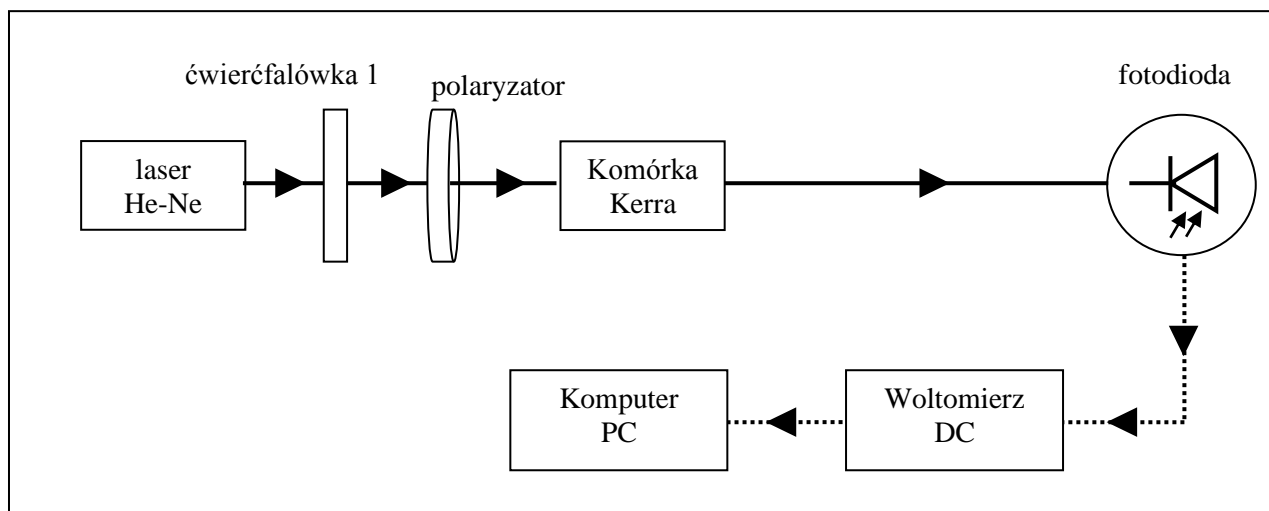
Aby wyznaczyć stałą Kerra wybranego oleju mineralnego należy oprócz układu polaryzacyjno-optycznego przedstawionego na rys. 1 zastosować następujące przyrządy:

- laser o znanej długości fali np. laser He-Ne o długości fali $\lambda = 632,8 \text{ nm}$,
- ćwierćfalówki dostosowane do wykorzystywanej długości fali np. $\lambda = 632,8 \text{ nm}$,
- polaryzatory (polaryzator i analizator),
- fotodiodę jako element fotodetekcji światła na wyjściu układu pomiarowego,
- woltomierz typu Lock-in do pomiaru natężenia światła $I^{2\Omega}$,
- wzmacniacz wraz z transformatorem do przyłożenia do komórki Kerra wysokiego napięcia,
- sondę wysokonapięciową do pomiaru przykładanego napięcia,
- multimetry cyfrowe do pomiaru I^0 oraz U_0 .

Zmienne napięcie o częstości Ω przykładane do komórki Kerra wytworzone jest przez wewnętrzny generator woltomierza typu Lock-in. Po wzmocnieniu przez wzmacniacz oraz transformator i po przejściu przez układ nadprądowy jest ono doprowadzone do komórki Kerra. Układ nadprądowego stosuje się aby zapobiec ewentualnym przebicim elektrycznym. Wartość skuteczna U_h napięcia przyłożonego do komórki Kerra mierzona jest przez sondę wysokonapięciową i woltomierz AC a następnie zapisywana przez komputer. Z kolei napięcia na wyjściu fotodiody proporcjonalne do natężenia padającego na nią światła mierzone są przez woltomierz DC rejestrujący napięcie proporcjonalne do I^0 oraz przez woltomierz Lock-in rejestrujący napięcie skuteczne proporcjonalne do $I^{2\Omega}$. Obie wielkości są również zapisywane przez komputer.

6. Przebieg pomiaru

A. Zestawić układ polaryzacyjno-optyczny jak na rysunku 4.



Rys. 4. Zestaw polaryzacyjno-optyczny do pomiaru zamiany polaryzacji liniowej na wyjściu lasera He-Ne na polaryzację kołową przy pomocy ćwierćfalówki 1.

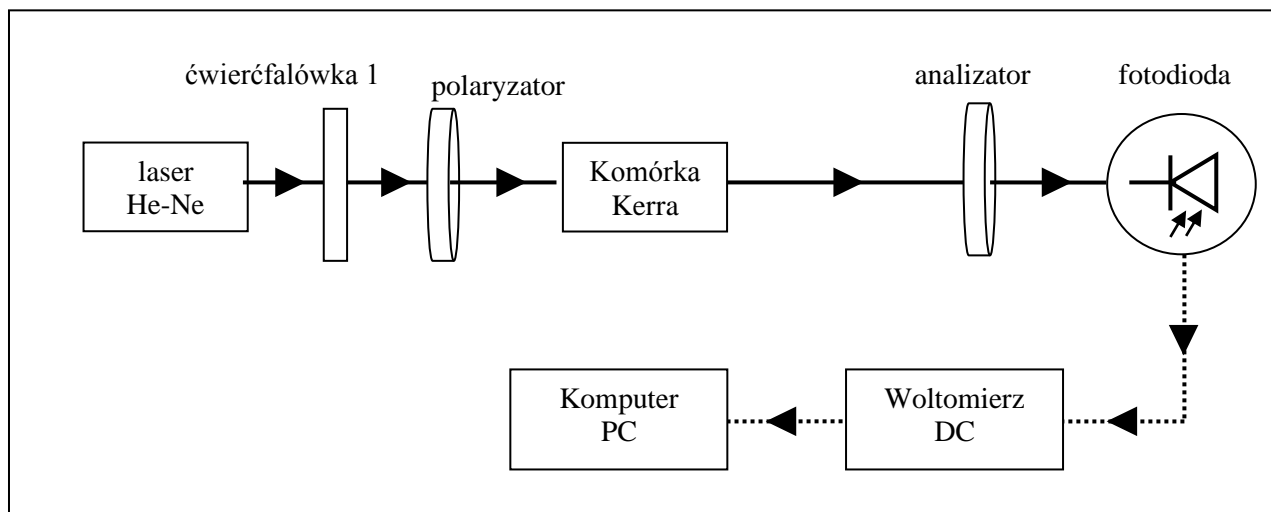
Wykaz czynności:

1. Usunąć z układu ćwierćfalówkę 1.
2. Obracając polaryzator doprowadzić do takiego jej położenia, przy którym I_w (U^0 na woltomierzu DC) będzie minimalne.
3. Wstawić do układu ćwierćfalówkę 1.
4. Obracając ćwierćfalówkę 1 doprowadzić do takiego jej położenia, przy którym I_w będzie minimalne.
5. Obrócić ćwierćfalówkę dokładnie o kąt 45° . Teoretycznie ćwierćfalówka powinna zamieniać polaryzację liniową światła na wyjściu lasera na polaryzację kołową.
6. Obracając polaryzator o ustalony kąt Θ (np. co 5°) znaleźć zależność I_w w funkcji kąta Θ . Zmieniać kąt Θ w zakresie od 0° do 360° .
7. Wykonać wykres zależności $I_w(\Theta)$. Zauważyć, że zgodnie z teorią gdyby ćwierćfalówka 1 byłaby idealna to natężenie światła $I_w \approx \text{const}$. Zmiany I_w w funkcji kąta Θ sugerują, że w przypadku rzeczywistej ćwierćfalówki polaryzacja światła nie jest kołowa lecz eliptyczna. Określić stopień eliptyczności polaryzacji poprzez obliczenie parametru e zdefiniowanego jako:

$$e = \frac{I_w^{\max} - I_w^{\min}}{I_w^{\max} + I_w^{\min}} \quad (36)$$

gdzie I_w^{\max} to maksymalna wartość I_w zaś I_w^{\min} to minimalna wartość I_w . Odpowiednio I_w^{\max} odpowiada $U^{0\max}$ na woltomierzu DC, zaś I_w^{\min} odpowiada $U^{0\min}$ na woltomierzu DC.

- B. Zestawić układ polaryzacyjno-optyczny jak na rysunku 5 nie zmieniając położenia ćwierćfalówki 1 ustalonego w punkcie A.



Rys. 5. Zestaw polaryzacyjno-optyczny do sprawdzenia słuszności prawa Malusa.

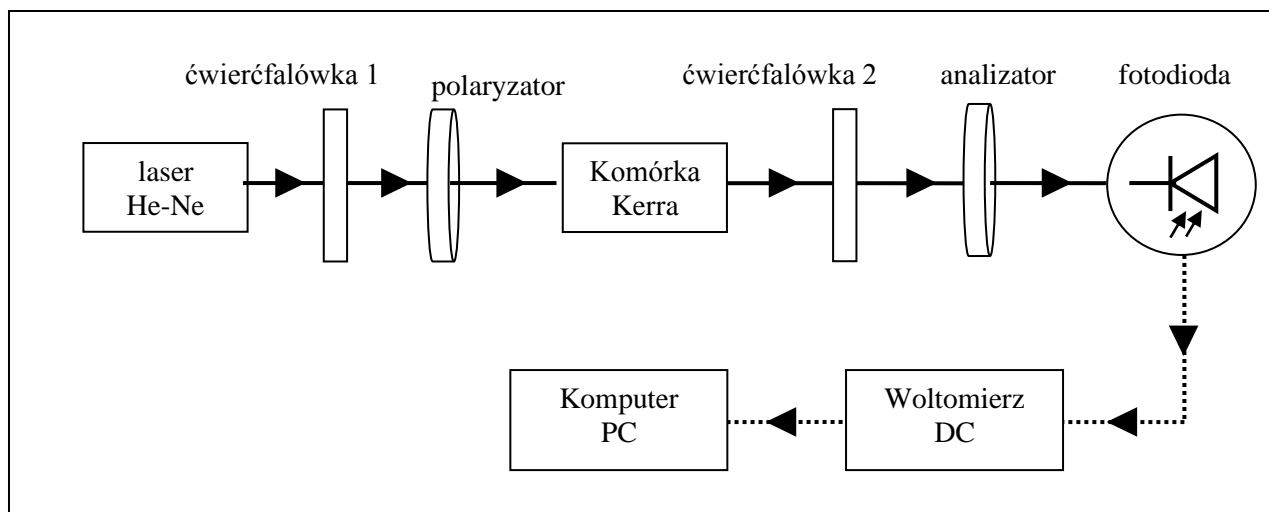
Wykaz czynności:

1. Wstawić do układu analizator.
2. Obracając analizator doprowadzić do takiego jego położenia, przy którym I_w będzie minimalne.
3. Obracając analizator o ustalony kąt Θ (np. co 5°) znaleźć zależność I_w w funkcji kąta Θ . Zmieniać kąt Θ w zakresie od 0° do 360° .
4. Wykonać wykres zależności $I_w(\Theta)$. Sprawdzić, czy spełnione jest prawo Malusa:

$$I_w = I_0 \sin^2(\Theta), \quad (37)$$

gdzie I_0 jest natężeniem światła I_w^{\max} .

- C. Zestawić układ polaryzacyjno-optyczny jak na rysunku 6 nie zmieniając położenia ćwierćfalówki 1 ustalonego w punkcie A.



Rys. 6. Zestaw polaryzacyjno-optyczny do sprawdzenia możliwości wprowadzenia modulatora elektrooptycznego w położenie optymalnego punktu jego pracy.

Wykaz czynności:

1. Usunąć ćwierćfalówkę 2 z układu.
2. Skrzyżować polaryzator i analizator – tzn. skrócić analizator do takiego położenia, przy którym natężenie światła na wyjściu układu I_w osiągnie wartość minimalną (bliską zeru).
3. Wstawić ćwierćfalówkę 2 do układu.
4. Obrócić ćwierćfalówkę w takie położenie, dla którego natężenie światła na wyjściu układu I_w osiągnie wartość minimalną bliską zeru.
5. Obrócić ćwierćfalówkę dokładnie o kąt 45° . Zanotować położenia polaryzatora – ϕ_P , ćwierćfalówki 2 – ϕ_C oraz analizatora – ϕ_A .
6. Obracając analizator o ustalony kąt Θ (np. co 5°) znaleźć zależność I_w w funkcji kąta Θ . Zmieniać kąt Θ w zakresie od 0° do 360° . Zauważyć, że podobnie jak w punkcie A, ćwierćfalówka 2 odbiega od idealnej i I_w nie jest wielkością stałą w funkcji zmian kąta Θ . Znaleźć współczynnik eliptyczności e zgodnie ze wzorem (36) dla ustalonego położenia ćwierćfalówki $\varphi_1 = \phi_C$.
7. Powtórzyć pomiary z punktu 6 dla trzech innych położenia ćwierćfalówki uzyskanych poprzez kolejne obroty ćwierćfalówki 2 o kąty 90° czyli dla $\varphi_2 = \phi_C + 90^\circ$, $\varphi_3 = \phi_C + 180^\circ$ oraz $\varphi_4 = \phi_C + 270^\circ$.

- D. Zestawić układ pomiarowy jak na rysunku 3 nie zmieniając położenia ćwierćfalówki 1 ustalonego w punkcie A oraz ustawiając położenie ćwierćfalówki 2 w położeniu $\varphi_1 = \varphi_C$ (pkt 5 w zadaniu C).

Wykaz czynności:

1. Zanotować położenia polaryzatora – φ_P , ćwierćfalówki 2 – φ_C oraz analizatora – φ_A .
2. Przyłożyć do komórki Kerra napięcie U_h o wartość skutecznej ok. 1000V i zmierzyć napięcie skuteczne $U^{2\Omega}$ proporcjonalne do $I^{2\Omega}$ oraz napięcie U^0 proporcjonalne do I^0 .
3. Obracać jednocześnie polaryzator, ćwierćfalówkę 2 oraz analizator o taki sam kąt Θ (co ok. 5°) wykonując pomiar zależności tzw. współczynnika głębokości modulacji zdefiniowanego jako:

$$m^{2\Omega} = \frac{I^{2\Omega}}{I^0} = \frac{U^{2\Omega}}{U^0}, \quad (38)$$

gdzie $U^{2\Omega}$ jest napięciem skutecznym mierzonym przez woltomierz Lock-in na częstotliwości 2Ω , zaś U^0 jest napięciem mierzonym przez woltomierz DC. Zmieniać kąt Θ w zakresie od 0° do 90° . Na podstawie uzyskanej zależności $m^{2\Omega}$ od kąta Θ znaleźć taki kąt Θ_1 , dla którego $m^{2\Omega}$ osiągnie minimum.

4. Zmieniając kąt Θ co jeden stopień z przedziału $\langle \Theta_1 - 10^\circ; \Theta_1 + 10^\circ \rangle$ ponownie jednocześnie obracać polaryzator, ćwierćfalówkę 2 oraz analizator o ten sam kąt i wykonać ponowne dokładniejsze pomiary $m^{2\Omega}$ w funkcji kąta Θ . Zrobić wykres zależności $m^{2\Omega}$ w funkcji kąta Θ . Na podstawie wykresu znaleźć taki kąt Θ_2 dla którego $m^{2\Omega}$ osiągnie wartość minimalną.
5. Obrócić polaryzator, ćwierćfalówkę 2 oraz analizator w położenie określone poprzez kąt $\Theta_2 - 45^\circ$. Oznacza to, że polaryzator, ćwierćfalówkę 2 oraz analizator należy obrócić o kąt $= -45^\circ$ wobec takiego położenia, dla którego $m^{2\Omega}$ osiągnął minimum z punktu 4.
6. Zmieniając napięcie skuteczne U_h przykładane do komórki Kerra np. co 100 V od 500 V do ok. 2000 V wyznaczyć zależność współczynnika modulacji m^2 od przykładanego wysokiego napięcia U_h .
7. Wykonać wykres zależności współczynnika modulacji $m^{2\Omega}$ od kwadratu napięcia U_h .
8. Stosując metodę najmniejszych kwadratów wyznaczyć współczynnik kierunkowy zależności liniowej $m^{2\Omega}$ od U_h^2 . Obliczyć niepewność standardową typu A wartości współczynnika kierunkowego.
9. Powtórzyć pomiary z punktów od 6 do 8 dla trzech kolejnych ustawień ćwierćfalówki $\varphi_2 = (\Theta_2 - 45^\circ) + 90^\circ$, $\varphi_3 = (\Theta_2 - 45^\circ) + 180^\circ$ oraz $\varphi_4 = (\Theta_2 - 45^\circ) + 270^\circ$. Oznacza to, że należy za każdym razem obrócić ćwierćfalówkę o kąty kolejno o 90° , 180° oraz 270° wobec położenia ustalonego w punkcie 4.

7. Wskazówki do raportu

Raport powinien zawierać:

1. Stronę tytułową.
2. Sformułowanie celu ćwiczenia (wstęp teoretyczny nie jest wymagany i w przypadku jego zamieszczenia w raporcie nie wpłynie na ocenę).
3. Podstawowe definicje, wykorzystane wzory i opisy użytych symboli i oznaczeń.
4. Schemat układu pomiarowego.
5. Wykaz aparatury (producent, model i nr inwentarzowy - jeżeli jest dostępny), wykorzystane nastawy i zakresy, wykaz zbadanych elementów dwójłomnych.
6. Opracowanie wyników pomiarów (szczegółowe wskazówki podano dalej).
7. Uwagi końcowe i wnioski.

Opracowanie wyników pomiarów

Pkt A. – Zamiana polaryzacji liniowej na wyjściu lasera na kołową przy pomocy ćwierćfalówki 1.

1. Wykonać wykres zależności $I_w(\Theta)$ ($U^0(\Theta)$).
2. Określić stopień eliptyczności polaryzacji eliptycznej poprzez obliczenie parametru e .

Pkt B. – Sprawdzenie słuszności prawa Malusa przy pomocy polaryzatora i analizatora.

1. Wykonać wykres zależności $I_w(\Theta)$ ($U^0(\Theta)$).

Pkt C. – Ustawienie optymalnego punktu pracy modulatora elektrooptycznego.

1. Dla $\varphi_1 = \varphi_C$ wykonać wykres zależności $I_w(U^0)$ od kąta obrotu analizatora Θ . Wyznaczyć współczynnik e_1 .
2. Dla $\varphi_2 = \varphi_C + 90^\circ$ wykonać wykres zależności $I_w(U^0)$ od kąta obrotu analizatora Θ . Wyznaczyć współczynnik e_2 .
3. Dla $\varphi_3 = \varphi_C + 180^\circ$ wykonać wykres zależności $I_w(U^0)$ od kąta obrotu analizatora Θ . Wyznaczyć współczynnik e_3 .
4. Dla $\varphi_4 = \varphi_C + 270^\circ$ wykonać wykres zależności $I_w(U^0)$ od kąta obrotu analizatora Θ . Wyznaczyć współczynnik e_4 .
5. Na wspólnym wykresie nanieść zależności z punktów od 1 do 4. Porównać współczynniki eliptyczności e .

Pkt D. – Pomiar stałej Kerr'a dla wybranego oleju mineralnego.

1. Wykonać wykres zależności $m^{2\Omega}$ od kąta obrotu Θ układu – polaryzator, ćwierćfalówka 2 oraz analizatora dla napięcia skutecznego ok. 1000 V w zakresie zmian kąta Θ od 0° do 90° . Znaleźć kąt Θ_1 , dla którego $m^{2\Omega}$ osiągnie wartość minimum.
2. Wykonać wykres zależności $m^{2\Omega}$ od kąta obrotu Θ układu – polaryzator, ćwierćfalówka 2 oraz analizatora dla napięcia skutecznego ok. 1000 V w zakresie zmian kąta Θ z przedziału $\langle \Theta_1 - 10^\circ; \Theta_1 + 10^\circ \rangle$. Znaleźć kąt Θ_2 , dla którego $m^{2\Omega}$ wartość minimum.
3. Dla $\varphi_2 = (\Theta_2 - 45^\circ)$ wykonać wykres zależność $m^{2\Omega}$ od kwadratu napięcia skutecznego U_h . Wyznaczyć współczynnik kierunkowy a_1 zależności liniowej $m^{2\Omega} = a_1 \cdot U_h^2 + b_1$ oraz niepewność standardową Δa_1 typu A.
4. Dla $\varphi_2 = (\Theta_2 - 45^\circ) + 90^\circ$ wykonać wykres zależność $m^{2\Omega}$ od kwadratu napięcia skutecznego U_h . Wyznaczyć współczynnik kierunkowy a_2 zależności liniowej $m^{2\Omega} = a_2 \cdot U_h^2 + b_2$ oraz niepewność standardową Δa_2 typu A.
5. Dla $\varphi_2 = (\Theta_2 - 45^\circ) + 180^\circ$ wykonać wykres zależność $m^{2\Omega}$ od kwadratu napięcia skutecznego U_h . Wyznaczyć współczynnik kierunkowy a_3 zależności liniowej $m^{2\Omega} = a_3 \cdot U_h^2 + b_3$ oraz niepewność standardową Δa_3 typu A.
6. Dla $\varphi_2 = (\Theta_2 - 45^\circ) + 270^\circ$ wykonać wykres zależność $m^{2\Omega}$ od kwadratu napięcia skutecznego U_h . Wyznaczyć współczynnik kierunkowy a_4 zależności liniowej $m^{2\Omega} = a_4 \cdot U_h^2 + b_4$ oraz niepewność standardową Δa_4 typu A.

Znaleźć wartość średnią współczynnika kierunkowego stosując dwie metody.

Metoda 1.

Wyznaczyć wartość średnią zgodnie ze wzorem:

$$a_{\text{śred}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}, \quad (39)$$

oraz odchylenie standardowe wartości średniej $\sigma(a_{\text{śred}})$ zgodnie ze wzorem:

$$\sigma(a_{\text{śred}}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^4 (a_i - a_{\text{śred}})^2}{4 \cdot 3}}. \quad (40)$$

Korzystając z rozkładu Studenta-Fishera, obliczyć niepewność rozszerzoną pomiaru dla poziomów ufności $\alpha = 0,90$; $\alpha = 0,95$ oraz $\alpha = 0,99$ wykorzystując wzór:

$$\Delta(a_{\text{śred}}) = t_\alpha \cdot \sigma(a_{\text{śred}}), \quad (41)$$

gdzie współczynnik rozszerzenia $t_{\alpha=0,90} = 2,35$; $t_{\alpha=0,95} = 3,18$ oraz $t_{\alpha=0,99} = 5,84$.

Podać wyniki dla poszczególnych poziomów ufności w postaci:

1. Wartość średnia $a_{\text{śred}}$ z prawdopodobieństwem 90% obejmuje przedział:
 $(a_{\text{śred}} - t_{\alpha=0,90} \cdot \sigma(a_{\text{śred}}); a_{\text{śred}} + t_{\alpha=0,90} \cdot \sigma(a_{\text{śred}}))$,
2. Wartość średnia $a_{\text{śred}}$ z prawdopodobieństwem 95% obejmuje przedział:
 $(a_{\text{śred}} - t_{\alpha=0,95} \cdot \sigma(a_{\text{śred}}); a_{\text{śred}} + t_{\alpha=0,95} \cdot \sigma(a_{\text{śred}}))$,
3. Wartość średnia $a_{\text{śred}}$ z prawdopodobieństwem 99% obejmuje przedział:
 $(a_{\text{śred}} - t_{\alpha=0,99} \cdot \sigma(a_{\text{śred}}); a_{\text{śred}} + t_{\alpha=0,99} \cdot \sigma(a_{\text{śred}}))$.

Metoda 2.

Na wspólnym wykresie nanieść punkty pomiarowe $m^{2\Omega}$ w funkcji U_h^2 dla wszystkich czterech położenia ćwierćfalówki. Wyznaczyć współczynnik kierunkowy $a_{\text{śred}}$ zależności liniowej $m^{2\Omega} = a_{\text{śred}} \cdot U_h^2 + b_{\text{śred}}$ oraz niepewność standardową $\Delta a_{\text{śred}}$ typu A.

Podać wynik w postaci: $a_{\text{śred}} \in \langle a_{\text{śred}} - \Delta a_{\text{śred}}; a_{\text{śred}} + \Delta a_{\text{śred}} \rangle$.

Porównać wyniki uzyskane metodą 1 i metodą 2.

Dla wartości średniej współczynnika kierunkowego $a_{\text{śred}}$ wyznaczyć można współczynnik efektu Kerra dla wybranego oleju mineralnego. Biorąc pod uwagę fakt, że $U^{2\Omega}$ jest wprost proporcjonalne do $I^{2\Omega}$ zaś U^0 jest wprost proporcjonalne do I^0 , gdyż efektem pracy fotodiody jest zamiana natężenia światła na napięcie elektryczne, to zgodnie ze wzorami:

$$I^0 = \varepsilon \cdot U^0, \quad (42)$$

oraz

$$I_0^{2\Omega} = \varepsilon \cdot U_0^{2\Omega}, \quad (43)$$

gdzie ε jest współczynnikiem zamiany, współczynnik głębokości modulacji $m(2\Omega)$ zdefiniować można jako:

$$m(2\Omega) = \frac{U_0^{2\Omega}}{U^0} = \frac{I_0^{2\Omega}}{I^0}. \quad (44)$$

Uwzględniając wzory (34) i (35) oraz uwzględniając fakt, że:

$$\pi L K \frac{U_0^2}{d^2} \ll 1, \quad (45)$$

współczynnik głębokości modulacji opisuje wzór:

$$m(2\Omega) = \frac{I_0 \left[\frac{1}{2} \pi L K \frac{U_0^2}{d^2} \right]}{I_0 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \pi L K \frac{U_0^2}{d^2} \right]} \cong \frac{I_0 \left[\frac{1}{2} \pi L K \frac{U_0^2}{d^2} \right]}{I_0 \left[\frac{1}{2} \right]} = \pi L K \frac{U_0^2}{d^2}. \quad (46)$$

Współczynnik głębokości modulacji zdefiniowany wzorami (44) i (46) jest współczynnikiem amplitudowym, czyli związanym z amplitudą zmian I_w na drugiej harmonicznej względem Ω zgodnie ze wzorem (33). Z kolei współczynnik głębokości modulacji zdefiniowany wzorem (38) związany jest z wartością skuteczną $U^{2\Omega}$ zaś U_h jest wartością skuteczną U_0 . Oznacza to, że:

$$m^{2\Omega} = \frac{m(2\Omega)}{\sqrt{2}}, \quad (47)$$

$$U_h = \frac{U_0}{\sqrt{2}}. \quad (48)$$

Po podstawieniu wzorów (47) i (48) do wzoru (46) otrzymać można wyrażenie na doświadczalnie wyznaczaną głębokość modulacji $m^{2\Omega}$ w funkcji kwadratu U_h :

$$\sqrt{2} \cdot m^{2\Omega} \cong \pi L K \frac{(\sqrt{2} \cdot U_h)^2}{d^2}. \quad (49)$$

Stąd:

$$m^{2\Omega} \cong \frac{\sqrt{2} \pi L K}{d^2} (U_h)^2. \quad (50)$$

Wzór (50) przedstawia zależność liniową $m^{2\Omega}$ w funkcji kwadratu U_h :

$$m^{2\Omega} \cong a \cdot (U_h)^2. \quad (51)$$

Porównując wzory (50) i (51) oraz znając współczynnik kierunkowy $a_{\text{śred}}$, długość L okładek i odległość d pomiędzy okładkami kondensatora w komórce Kerra, można wyznaczyć stałą Kerra K ze wzoru:

$$K_{\text{śred}} = \frac{d^2}{\sqrt{2} \pi L} a_{\text{śred}}. \quad (52)$$

Jest on rzędu 10^{-15} [m/V²].

Niepewność stałej Kerra należy wyznaczyć ze wzorów (53) i (54):

$$\Delta K_{\text{śred}} = K_{\text{śred}} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta a_{\text{śred}}}{a_{\text{śred}}} \right)^2 + \left(2 \cdot \frac{\Delta d}{d} \right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2}, \quad (53)$$

$$\Delta K_{\text{śred}} = K_{\text{śred}} \cdot \left(\frac{\Delta a_{\text{śred}}}{a_{\text{śred}}} + 2 \cdot \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta L}{L} \right), \quad (54)$$

gdzie Δd i ΔL oznaczają odpowiednio błędy pomiarów odległości pomiędzy okładkami d oraz długości okładek L .

Porównać błędy uzyskane ze wzorów (53) i (54) i wybrać większy z błędów.

7. Literatura

- [1] F. Ratajczyk, „Dwójłomność i polaryzacja optyczna”, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2000. Dostępny np. pod adresami:
<https://docer.pl/doc/558x5>
<https://www.dbc.wroc.pl/dlibra/publication/421/edition/482?language=pl>
- [2] M. Izdebski, Materiały do wykładu „Lasery i ich wybrane zastosowania w fizyce”, Instytut Fizyki PŁ 2022.
- [3] Ewaluacja danych pomiarowych. Przewodnik wyrażania niepewności pomiaru, JCGM 100:2008. Wersja polska dostępna na stronie Głównego Urzędu Miar:
<https://www.gum.gov.pl/pl/aktualnosci/3285,Polska-wersja-przewodnika-wyrazania-niepewnosci-pomiaru-juz-dostepna.html>