

Temat 5. Płaska monochromatyczna fala świetlna

5.1. Równania Maxwella [3,6]

Równania Maxwella

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (5.1a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad (5.1b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (5.1c)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (5.1d)$$

Równania materiałowe

$$\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (5.1e)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}, \quad (5.1f)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (5.1g)$$

gdzie:

\mathbf{E} – wektor natężenia pola elektrycznego,
 \mathbf{D} – wektor indukcji elektrycznej,
 \mathbf{H} – wektor natężenia pola magnetycznego,
 \mathbf{B} – wektor indukcji magnetycznej,
 \mathbf{j} – wektor gęstości prądu elektrycznego,
 ρ – gęstość ładunku elektrycznego,

ϵ – względna przenikalność elektr. ośrodka,
 ϵ_0 – przenikalność elektryczna próżni,
 μ – względna przenikalność magn. ośrodka,
 μ_0 – przenikalność magnetyczna próżni,
 σ – przewodność elektryczna ośrodka.

Uwaga: symbol \mathbf{E} wprowadzono w celu odróżnienia pola o częstotliwości optycznej od rozważanego dalej natężenia \mathbf{E} pola stałego lub o niskiej częstotliwości.

c.d. Równania Maxwella... założenia dla fali świetlnej w dielektryku

W ogólności w ośrodku anizotropowym względne przenikalności ϵ oraz μ są opisane tensorami drugiej rangi.

Dla pól o częstotliwościach optycznych w dielektryku zazwyczaj przyjmuje się:

1). Właściwości magnetyczne ośrodka są mało istotne

$$\boldsymbol{\mu} = [\mathbf{1}]. \quad (5.2)$$

2). Jeżeli fala rozchodzi się w dielektryku, to

$$\mathbf{j} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (5.3)$$

oraz

$$\rho = 0. \quad (5.4)$$

c.d. Równania Maxwella... eliminacja składowej magnetycznej

$$\text{rot } \boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (5.1a)$$

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H}, \quad (5.1f)$$

$$\text{założenie} \quad \boldsymbol{\mu} = [\mathbf{1}]. \quad (5.2)$$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mu\mu_0 \mathbf{H} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{H} \quad (5.5)$$

twierdzenie Schwarz'a o przemienności
pochodnych cząstkowych

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad (5.1b)$$

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}_0 \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (5.1e)$$

$$\text{założenie} \quad \mathbf{j} = 0 \quad (5.3)$$

otrzymujemy

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} = -\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}_0\mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t^2}, \quad (5.6)$$

gdzie podwójny iloczyn wektorowy

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) - \nabla^2 \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (5.7)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) - \nabla^2 \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}_0\mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t^2} = 0. \quad (5.8)$$

5.2. Fala świetlna w jednorodnym ośrodku izotropowym

z równań Maxwella

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) - \nabla^2 \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t^2} = 0. \quad (5.8)$$

W przypadku ośrodka izotropowego tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ można zastąpić wielkością skalarną ε

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \cdot (\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}_0) = \varepsilon \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0 = 0 \quad \text{założenie}$$

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}_0, \quad (5.1e) \quad \text{div } \boldsymbol{D} = \rho, \quad (5.1c) \quad \rho = 0. \quad (5.4)$$

i równanie (5.8) redukuje się do postaci

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \boldsymbol{\varepsilon} = 0. \quad (5.9)$$

Jest to równanie fali rozchodzącej się z prędkością

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (5.10)$$

Stąd, dla $\varepsilon = 1$, prędkość światła w próżni wynosi:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (5.11)$$

5.3. Płaska fala świetlna w jednorodnym ośrodku anizotropowym

$$\left\| \begin{array}{l} \text{z równań Maxwella} \end{array} \right. \quad \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) - \nabla^2 \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0 . \quad (5.8)$$

Jednym z rozwiązań związku (5.8) jest równanie płaskiej fali monochromatycznej

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] , \quad (5.12)$$

gdzie: $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = [\varepsilon_{0x}, \varepsilon_{0y}, \varepsilon_{0z}]$ – wektor zespolonej amplitudy oscylacji wektora $\boldsymbol{\varepsilon}$,

i – jedność urojona,

ω – częstość kołowa,

t – czas,

\mathbf{k} – wektor falowy,

\mathbf{r} – wektor położenia $[x, y, z]$.

W celu ułatwienia interpretacji wyników wprowadzimy jednostkowy wektor \mathbf{s} kierunku fali

$$\mathbf{k} = \mathbf{s} |\mathbf{k}| , \quad (5.13)$$

oraz współczynnik załamania światła n

$$n = c/v , \quad (5.14)$$

gdzie v jest prędkością fazową fali

$$v = \omega / |\mathbf{k}| , \quad (5.15)$$

co prowadzi do równania fali płaskiej w postaci

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \exp[i\omega(t - n \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}/c)] . \quad (5.16)$$

c.d. Płaska fala świetlna w jednorodnym ośrodku anizotropowym

z równań Maxwella $\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) - \nabla^2 \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t^2} = 0.$ (5.8)

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (5.11)$$

równanie fali płaskiej $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \exp[i\omega(t - n \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}/c)].$ (5.16)

Po wykonaniu przekształceń ...

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) = -\omega^2 \frac{n^2}{c^2} (\varepsilon_{0x} s_x + \varepsilon_{0y} s_y + \varepsilon_{0z} s_z) \mathbf{s} \exp[i\omega(t - n \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}/c)], \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \boldsymbol{\varepsilon} &= -\omega^2 \frac{n^2}{c^2} \boldsymbol{\varepsilon}_0 (s_x^2 + s_y^2 + s_z^2) \exp[i\omega(t - n \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}/c)] = \\ &= -\omega^2 \frac{n^2}{c^2} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \exp[i\omega(t - n \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}/c)], \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t^2} = -\omega^2 \boldsymbol{\varepsilon}_0 \exp[i\omega(t - n \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}/c)]. \quad (5.19)$$

... i podzieleniu przez powtarzający się wyraz $(\omega^2/c^2) \exp[i\omega(t - n \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}/c)]$ otrzymujemy

$$n^2 (\varepsilon_{0x} s_x + \varepsilon_{0y} s_y + \varepsilon_{0z} s_z) \mathbf{s} - n^2 \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}_0 = 0. \quad (5.20)$$

c.d. Płaska fala świetlna w jednorodnym ośrodku anizotropowym

$$n^2 (\epsilon_{0x}s_x + \epsilon_{0y}s_y + \epsilon_{0z}s_z)\mathbf{s} - n^2 \boldsymbol{\epsilon}_0 + \boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{\epsilon}_0 = 0. \quad (5.20)$$

Równanie (5.20) można zapisać w postaci macierzowej jako

$$\begin{bmatrix} n^2(s_x^2 - 1) + \epsilon_{xx} & n^2 s_x s_y + \epsilon_{xy} & n^2 s_x s_z + \epsilon_{xz} \\ n^2 s_y s_x + \epsilon_{yx} & n^2(s_y^2 - 1) + \epsilon_{yy} & n^2 s_y s_z + \epsilon_{yz} \\ n^2 s_z s_x + \epsilon_{zx} & n^2 s_z s_y + \epsilon_{zy} & n^2(s_z^2 - 1) + \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{0x} \\ \mathcal{E}_{0y} \\ \mathcal{E}_{0z} \end{bmatrix} = 0. \quad (5.21)$$

Warunkiem istnienia niezerowych rozwiązań (5.21) względem składowych \mathcal{E}_{0i} jest

$$\begin{vmatrix} n^2(s_x^2 - 1) + \epsilon_{xx} & n^2 s_x s_y + \epsilon_{xy} & n^2 s_x s_z + \epsilon_{xz} \\ n^2 s_y s_x + \epsilon_{yx} & n^2(s_y^2 - 1) + \epsilon_{yy} & n^2 s_y s_z + \epsilon_{yz} \\ n^2 s_z s_x + \epsilon_{zx} & n^2 s_z s_y + \epsilon_{zy} & n^2(s_z^2 - 1) + \epsilon_{zz} \end{vmatrix} = 0. \quad (5.22)$$

W celu uproszczenia postaci równań (5.21) i (5.22) zapiszemy je w układzie współrzędnych XYZ, w którym:

$$Z \parallel \mathbf{s}, \text{ tzn. } \mathbf{s} = [0, 0, 1].$$

c.d. Płaska fala świetlna w jednorodnym ośrodku anizotropowym

W układzie współrzędnych, w którym $\mathbf{s} = [0, 0, 1]$, równania (5.21) i (5.22) przyjmują postać:

$$\begin{bmatrix} -n^2 + \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & -n^2 + \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{0x} \\ \mathcal{E}_{0y} \\ \mathcal{E}_{0z} \end{bmatrix} = 0, \quad (5.23)$$

$$\begin{vmatrix} -n^2 + \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & -n^2 + \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix} = 0. \quad (5.24)$$

Równanie (5.24) jest równaniem kwadratowym względem n^2 , co oznacza, że:

**w ośrodku anizotropowym mogą rozchodzić się w danym kierunku \mathbf{s}
dwie fale o różnych prędkościach.**

Ze względu na obszerną postać rozwiązań względem n^2 , które zależą od wszystkich składowych ϵ_{ij} , zapis taki jest rzadko wykorzystany.

Zapis rozwiązań (5.24) jest prostszy przy użyciu składowych tensora nieprzenikalności

$$[\mathbf{B}] = [\boldsymbol{\epsilon}]^{-1} \quad \Leftrightarrow B_{ik} \epsilon_{kj} = \delta_{ij} \quad (5.25)$$

c.d. Płaska fala świetlna w jednorodnym ośrodku anizotropowym

Mnożąc lewostronnie równanie (5.23) przez tensor $[\mathbf{B}]$ zapisany w układzie XYZ, gdzie $Z \parallel \mathbf{s}$, otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -n^2 + \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & -n^2 + \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{0x} \\ \mathcal{E}_{0y} \\ \mathcal{E}_{0z} \end{bmatrix} = 0, \quad (5.26)$$

$$\begin{bmatrix} -n^2 B_{xx} + B_{xk} \varepsilon_{kx} & -n^2 B_{xy} + B_{xk} \varepsilon_{ky} & B_{xk} \varepsilon_{kz} \\ -n^2 B_{yx} + B_{yk} \varepsilon_{yx} & -n^2 B_{yy} + B_{yk} \varepsilon_{ky} & B_{yk} \varepsilon_{kz} \\ -n^2 B_{zx} + B_{zk} \varepsilon_{yx} & -n^2 B_{zy} + B_{zk} \varepsilon_{ky} & B_{zk} \varepsilon_{kz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{0x} \\ \mathcal{E}_{0y} \\ \mathcal{E}_{0z} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.27)$$

i stąd po uwzględnieniu związku $B_{ik} \varepsilon_{kj} = \delta_{ij}$ (5.25)

$$\begin{bmatrix} -n^2 B_{xx} + 1 & -n^2 B_{xy} & 0 \\ -n^2 B_{yx} & -n^2 B_{yy} + 1 & 0 \\ -n^2 B_{zx} & -n^2 B_{zy} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{0x} \\ \mathcal{E}_{0y} \\ \mathcal{E}_{0z} \end{bmatrix} = 0. \quad (5.28)$$

Niezerowe rozwiązania równania (5.28) względem składowych \mathcal{E}_{0i} istnieją gdy

$$\begin{vmatrix} -n^2 B_{xx} + 1 & -n^2 B_{xy} & 0 \\ -n^2 B_{yx} & -n^2 B_{yy} + 1 & 0 \\ -n^2 B_{zx} & -n^2 B_{zy} & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.29)$$

c.d. Płaska fala świetlna w jednorodnym ośrodku anizotropowym

$$\left| \begin{array}{ccc} -n^2 B_{xx} + 1 & -n^2 B_{xy} & 0 \\ -n^2 B_{yx} & -n^2 B_{yy} + 1 & 0 \\ -n^2 B_{zx} & -n^2 B_{zy} & 1 \end{array} \right| = 0. \quad (5.29)$$

Równanie (5.29) posiada dwa rozwiązania względem n^2 , które w układzie współrzędnych z osią $Z||\mathbf{s}$, zależy od tylko 4-ech składowych tensora B_{ij} :

fala szybsza
(*ang. fast*)

$$n_f^2 = \frac{2}{B_{xx} + B_{yy} + \sqrt{(B_{xx} - B_{yy})^2 + 4B_{xy}B_{yx}}}, \quad (5.30)$$

fala wolniejsza
(*ang. slow*)

$$n_s^2 = \frac{2}{B_{xx} + B_{yy} - \sqrt{(B_{xx} - B_{yy})^2 + 4B_{xy}B_{yx}}}. \quad (5.31)$$

5.4. Opis stanu polaryzacji światła

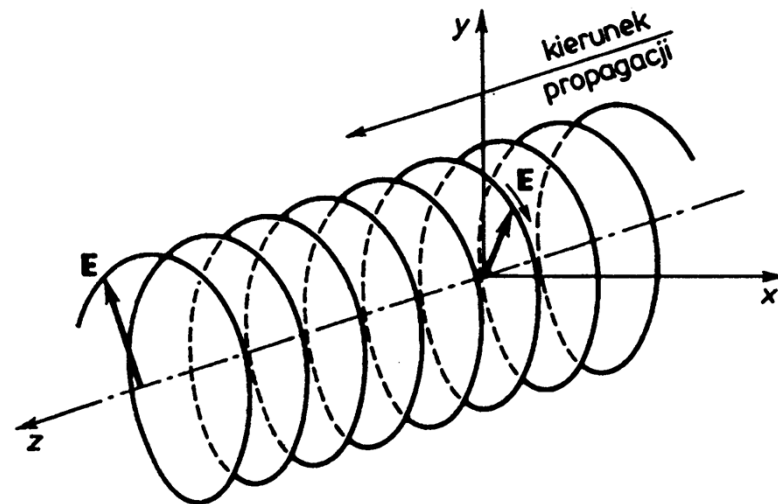
$$\begin{bmatrix} -n^2 B_{xx} + 1 & -n^2 B_{xy} & 0 \\ -n^2 B_{yx} & -n^2 B_{yy} + 1 & 0 \\ -n^2 B_{zx} & -n^2 B_{zy} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{0x} \\ \mathcal{E}_{0y} \\ \mathcal{E}_{0z} \end{bmatrix} = 0, \quad (5.28)$$

Podstawienie np. n_f (5.30) do (5.28) umożliwia wykazanie, że w ośrodku anizotropowym:

- możliwe jest istnienie składowej podłużnej $\mathcal{E}_{0z} \neq 0$ (zazwyczaj pomijalnie mała),
- dla zespolonych składowych B_{ij} składowe \mathcal{E}_{0x} i \mathcal{E}_{0y} mogą przyjmować wartości zespolone.

$$\text{równanie fali płaskiej} \quad \boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_0 \exp[i\omega(t - n \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}/c)], \quad \text{współrzędna } Z \parallel \mathbf{s}. \quad (5.16)$$

Dla zespolonego $\boldsymbol{\mathcal{E}}_0$ koniec składowej rzeczywistej wektora $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ (5.16) zatacza helisę eliptyczną (zaniedbując składową \mathcal{E}_{0z}).



Rys. 5.1. Fala świetlna spolaryzowana eliptycznie [6].

c.d. Opis stanu polaryzacji światła

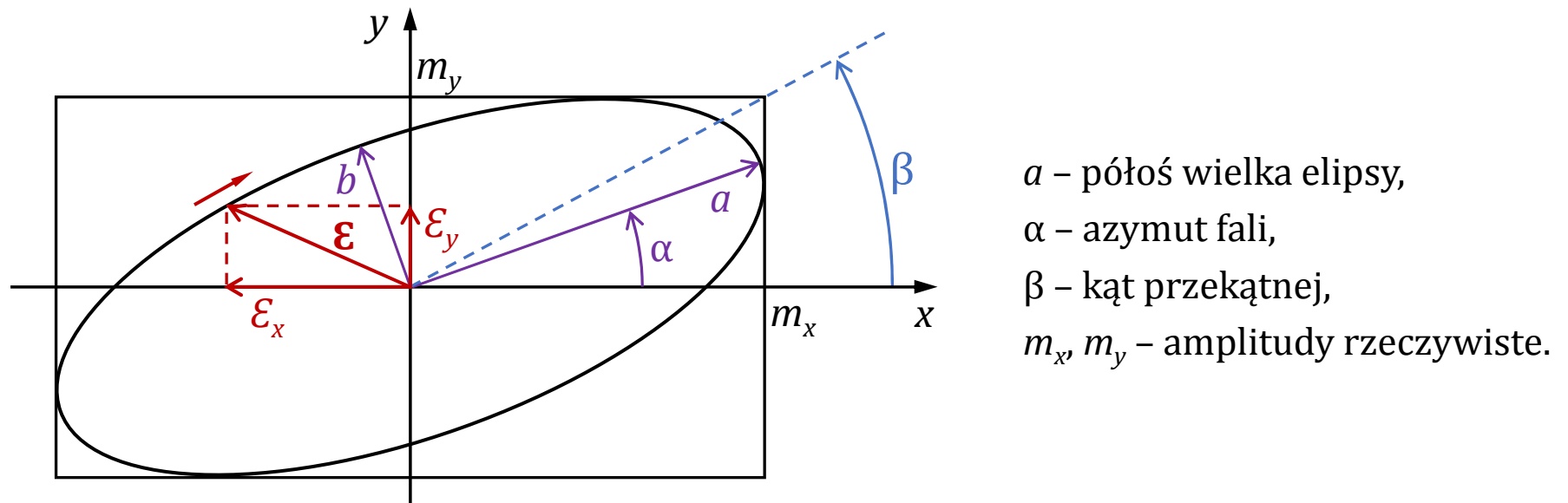
równanie fali płaskiej $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \exp[i\omega(t - n \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}/c)]$, współrzędna z || \mathbf{s} . (5.16)

Wektor $\boldsymbol{\varepsilon}$ (5.16) można przepisać wyłączając kąty fazowe z amplitudy zespolonej

$$\varepsilon_x = |\varepsilon_{0x}| \exp[i(\omega t - \omega n z/c - \delta_x)], \quad (5.32)$$

$$\varepsilon_y = |\varepsilon_{0y}| \exp[i(\omega t - \omega n z/c - \delta_y)]. \quad (5.33)$$

Koniec rzeczywistej części wektora $\boldsymbol{\varepsilon}$ kreśli elipsę na płaszczyźnie $z = \text{const}$.



Rys. 5.2. Elipsa stanu polaryzacji i określające ją wielkości.

c.d. Opis stanu polaryzacji światła

Elipsę stanu polaryzacji fali można opisać następującymi wielkościami:

- **Amplitudy m_x i m_y** wyznaczają prostokąt, w który wpisana jest elipsa

$$m_x = |\mathcal{E}_{0x}|, \quad m_y = |\mathcal{E}_{0y}|. \quad (5.34)$$

- **Kąt przekątnej β** , tzn. kąt z przedziału $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ pomiędzy osią $+x$ a przekątną prostokąta opisanego na elipsie stanu polaryzacji. Z rysunku 5.2 wynika, że

$$\tan \beta = \frac{m_y}{m_x}, \quad \sin \beta = \frac{m_y}{\sqrt{m_x^2 + m_y^2}}, \quad \cos \beta = \frac{m_x}{\sqrt{m_x^2 + m_y^2}}. \quad (5.35)$$

- **Azymut fali α** , określony jako kąt skierowany z przedziału $-\beta \leq \alpha \leq \beta$ zakreślony od osi $+x$ do osi wielkiej a elipsy.

- **Różnica faz δ**

$$\delta = \delta_x - \delta_y. \quad (5.36)$$

- **Skretność fali** - kierunek obrotów końca wektora \mathbf{E} na płaszczyźnie $z = \text{const}$.

Gdy fala biegnie wzdłuż $+z$ do obserwatora, to:

- $0^\circ < \delta < 180^\circ$ - *polaryzacja prawoskrętna*, tzn. wektor obraca się zgodnie z ruchem wskazówek zegara,
- $180^\circ < \delta < 360^\circ$ - *polaryzacja lewoskrętna*,
- $\delta = 0^\circ$ oraz 180° - *polaryzacja liniowa* i skretność nie występuje.

Uwaga: to jest konwencja odwrotna do reguły śruby prawoskrętnej.

c.d. Opis stanu polaryzacji światła

$$\begin{bmatrix} -n^2 B_{xx} + 1 & -n^2 B_{xy} & 0 \\ -n^2 B_{yx} & -n^2 B_{yy} + 1 & 0 \\ -n^2 B_{zx} & -n^2 B_{zy} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{0x} \\ \mathcal{E}_{0y} \\ \mathcal{E}_{0z} \end{bmatrix} = 0, \quad (5.28)$$

Podstawienie współczynników załamania n_f (5.30) i n_s (5.31) do wzoru (5.28) umożliwia znalezienie związków pomiędzy \mathcal{E}_{0x} oraz \mathcal{E}_{0y} i wyznaczenie według (5.35) kąta przekątnej fali szybszej β_f oraz kąta przekątnej fali wolniejszej β_s .

We współrzędnych gdzie $\mathbf{s} = [0, 0, 1]$

$$\tan(\beta_f) \tan(\beta_s) = \frac{|B_{yx}|}{|B_{xy}|}. \quad (5.37)$$

W praktyce zazwyczaj rozważa się hermitowskie tensory nieprzenikalności

$$B_{ij} = B_{ji}^*, \quad (5.38)$$

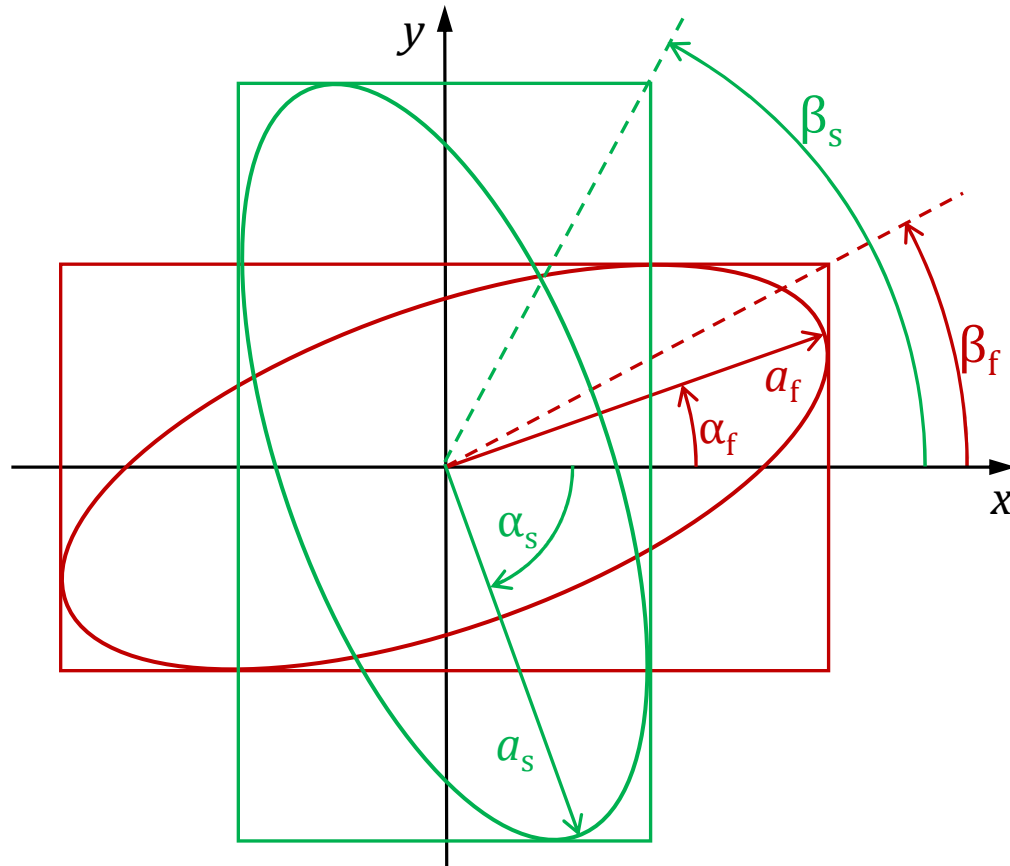
którymi można opisać wszystkie ośrodki nieabsorbujące, i wzór (5.33) upraszcza się do:

$$\boxed{|B_{yx}| = |B_{xy}| \implies \beta_s = 90^\circ - \beta_f}. \quad (5.39)$$

Jeżeli ośrodek jest absorbujący, równości (5.38) i (5.39) nie są spełnione dokładnie, jednakże można je stosować z bardzo dobrym przybliżeniem gdy znacząca absorpcja światła następuje na drodze bardzo dużej w porównaniu do długości fali.

c.d. Opis stanu polaryzacji światła

Dla hermitowskich tensorów nieprzenikalności:



Rys. 5.3. Elipsy polaryzacji fali szybszej (czerwona) i fali wolniejszej (zielona) dla $|B_{yx}| = |B_{xy}|$.

➤ **Kąty przekątnych fal:**

$$\parallel \quad \beta_s = 90^\circ - \beta_f \quad (5.39)$$

$$\sin \beta_f = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{B_{yy} - B_{xx}}{\sqrt{(B_{xx} - B_{yy})^2 + 4B_{xy}B_{xy}^*}}}, \quad (5.40)$$

$$\cos \beta_f = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{B_{yy} - B_{xx}}{\sqrt{(B_{xx} - B_{yy})^2 + 4B_{xy}B_{xy}^*}}}, \quad (5.41)$$

➤ **różnica faz δ** dla fali szybszej

$$\sin \delta_f = \frac{\text{Im}[B_{xy}^*]}{|B_{xy}|}, \quad \cos \delta_f = \frac{\text{Re}[B_{xy}]}{|B_{xy}|}, \quad (5.42)$$

zaś dla fali wolniejszej $\delta_s = \delta_f \pm 180^\circ$. (5.43)

➤ **półosie wielkie** elips polaryzacji fali szybszej i wolniejszej są prostopadłe.

Problem 1 do przećwiczenia

Jak wyprowadzić różnicę faz δ (5.42) i (5.43) dla hermitowskiego tensora \mathbf{B} ?

Wszystkie potrzebne wzory:

$$\begin{bmatrix} -n^2 B_{xx} + 1 & -n^2 B_{xy} & 0 \\ -n^2 B_{yx} & -n^2 B_{yy} + 1 & 0 \\ -n^2 B_{zx} & -n^2 B_{zy} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{0x} \\ \mathcal{E}_{0y} \\ \mathcal{E}_{0z} \end{bmatrix} = 0, \quad (5.28)$$

fala szybsza
(*ang. fast*)

$$n_f^2 = \frac{2}{B_{xx} + B_{yy} + \sqrt{(B_{xx} - B_{yy})^2 + 4B_{xy}B_{yx}}}, \quad (5.30)$$

fala wolniejsza
(*ang. slow*)

$$n_s^2 = \frac{2}{B_{xx} + B_{yy} - \sqrt{(B_{xx} - B_{yy})^2 + 4B_{xy}B_{yx}}}, \quad (5.31)$$

$$\mathcal{E}_x = |\mathcal{E}_{0x}| \exp[i(\omega t - nz/c - \delta_x)], \quad (5.32)$$

$$\mathcal{E}_y = |\mathcal{E}_{0y}| \exp[i(\omega t - nz/c - \delta_y)], \quad (5.33)$$

tensor hermitowski

$$B_{ij} = B_{ji}^*. \quad (5.38)$$

Problem 2 do przećwiczenia

Wyprowadzić związek β_f z β_s (5.37) dla dowolnego tensora \mathbf{B} .

Wszystkie potrzebne wzory:

$$\begin{bmatrix} -n^2 B_{xx} + 1 & -n^2 B_{xy} & 0 \\ -n^2 B_{yx} & -n^2 B_{yy} + 1 & 0 \\ -n^2 B_{zx} & -n^2 B_{zy} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{0x} \\ \mathcal{E}_{0y} \\ \mathcal{E}_{0z} \end{bmatrix} = 0, \quad (5.28)$$

fala szybsza
(ang. fast)

$$n_f^2 = \frac{2}{B_{xx} + B_{yy} + \sqrt{(B_{xx} - B_{yy})^2 + 4B_{xy}B_{yx}}}, \quad (5.30)$$

fala wolniejsza
(ang. slow)

$$n_s^2 = \frac{2}{B_{xx} + B_{yy} - \sqrt{(B_{xx} - B_{yy})^2 + 4B_{xy}B_{yx}}}, \quad (5.31)$$

$$\tan \beta = \frac{m_y}{m_x} = \frac{|\mathcal{E}_{0y}|}{|\mathcal{E}_{0x}|}. \quad (5.34)+(5.35)$$

Literatura do tematu 5

- [3] K. Shimoda, „Wstęp do fizyki laserów”, PWN, Warszawa 1993.
- [6] F. Ratajczyk, „Dwójłomność i polaryzacja optyczna”, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2000.