Temat 8. Zastosowanie światła laserowego do pomiarów wybranych właściwości optycznych monokryształów i cieczy

8.1. Pomiar naturalnej dwójłomności liniowej

Ośrodek absorbujący niedichroiczny, liniowy jest opisany macierzą Jonesa (tabela 7.1) [6]

$$\mathbf{J} = T\begin{bmatrix} \cos^2\alpha_\mathrm{f} + \sin^2\alpha_\mathrm{f}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma} & \sin\alpha_\mathrm{f}\cos\alpha_\mathrm{f}\left(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma}\right) \\ \sin\alpha_\mathrm{f}\cos\alpha_\mathrm{f}\left(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma}\right) & \sin^2\alpha_\mathrm{f} + \cos^2\alpha_\mathrm{f}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma} \end{bmatrix} \tag{7.9b}$$

Rozważmy układ pomiarowy złożony kolejno z:

1) doskonałego polaryzatora liniowego o azymucie α,
2) ośrodka liniowo dwójłomnego wprowadzającego szukaną różnicę faz Γ, przy czym
   a) ośrodek jest niedichroiczny, tzn. $T_\mathrm{f} = T_\mathrm{s} = T$,
   b) orientacja fali szybszej w ośrodku jest z góry znana i oś x wybrano w tej płaszczyźnie,
3) doskonałego analizatora liniowego o azymucie θ,
4) oraz fotodetektora natężenia przechodzącego światła.

Wektor Jonesa fali przechodzącej $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma} \end{bmatrix} |\mathcal{E}_0| \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} =$$

$$= T|\mathcal{E}_0| \begin{bmatrix} \cos^2\theta\cos\alpha + \sin\theta\cos\theta\sin\alpha\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma} \\ \sin\theta\cos\theta\cos\alpha + \sin^2\theta\sin\alpha\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma} \end{bmatrix}. \tag{8.1}$$

c.d. Pomiar naturalnej dwójłomności liniowej

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = T|\mathcal{E}_0|\begin{bmatrix}\cos^2\theta\cos\alpha + \sin\theta\cos\theta\sin\alpha\, e^{-i\Gamma} \\ \sin\theta\cos\theta\cos\alpha + \sin^2\theta\sin\alpha\, e^{-i\Gamma}\end{bmatrix}. \tag{8.1}$$

Stąd, natężenie przechodzącego światła określone jako $I = |\mathcal{E}_x|^2 + |\mathcal{E}_y|^2$

$$I = T^2 I_0 \left[\cos^2(\theta - \alpha) - \sin(2\theta)\sin(2\alpha)\sin^2\frac{\Gamma}{2}\right], \tag{8.2}$$

gdzie $I_0 = |\mathcal{E}_0|^2$ jest natężeniem światła bezpośrednio za polaryzatorem.

W optymalnych warunkach pomiaru różnica faz Γ ma największy wpływ na natężenie I, co odpowiada $\alpha = \pm 45°$ i $\theta = \pm 45°$. Istnieją zatem dwie nierównoważne optymalne konfiguracje odpowiadające równoległej oraz prostopadłej orientacji analizatora względem polaryzatora.

Można wyznaczyć:

$$\sin^2\frac{\Gamma}{2} = \frac{I_\perp}{I_\parallel + I_\perp}, \qquad \cos\Gamma = \frac{I_\parallel - I_\perp}{I_\parallel + I_\perp}, \tag{8.3}$$

gdzie:

- natężenie $I_\parallel$ zmierzono przy $\theta = \alpha = \pm 45°$,
- natężenie $I_\perp$ zmierzono przy $\theta = -\alpha = \pm 45°$.

Wnioski:

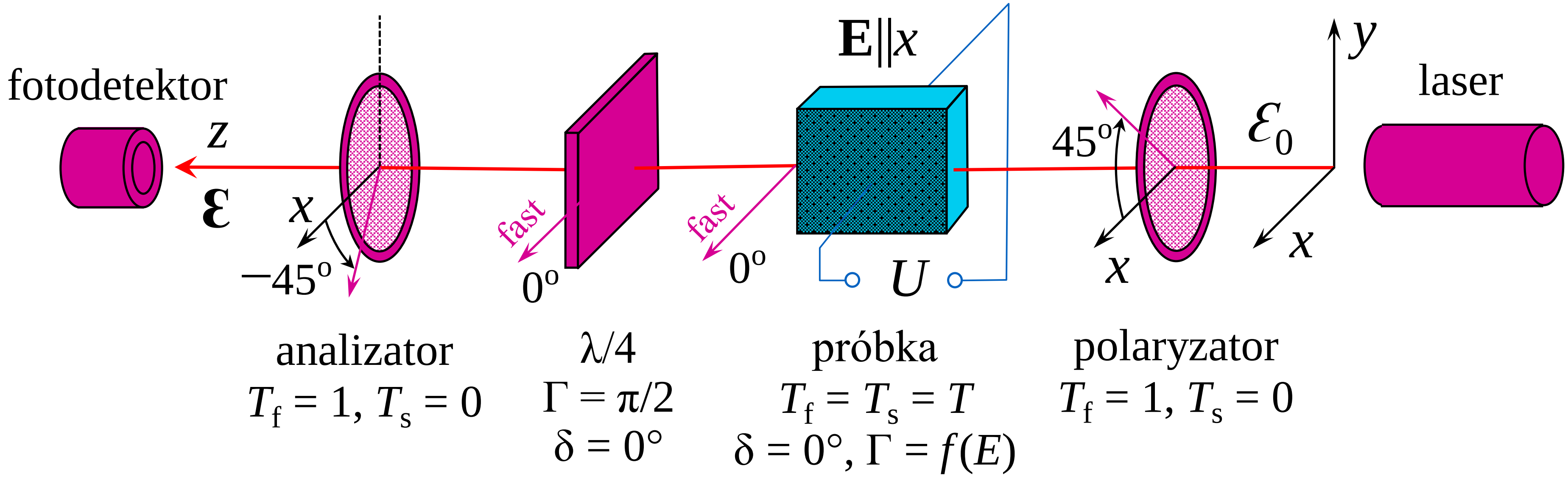
- metoda jest najmniej dokładna dla wartości Γ bliskich 0°, dla których $\cos\Gamma \approx 1$,
- metoda osiąga najlepszą dokładność dla wartości Γ bliskich 90°.

8.2. Pomiar efektów elektrooptycznych [a,b]

8.2.1. Klasyczny układ do pomiarów elektrooptycznych

Całkowita dwójłomność ośrodka w zewnętrznym polu elektrycznym $\Gamma = \Gamma_0 + \Delta\Gamma(E)$. Jeżeli dwójłomność naturalna nie występuje ($\Gamma_0 = 0$), to układ z poprzedniego rozdziału prowadzi do bardzo słabej i nieliniowej zależności I od $\Gamma(E)$.

Wniosek: należy wprowadzić dodatkową liniową płytkę ćwierćfalową.



Rys. 8.1. Klasyczna konfiguracja układu do pomiaru efektów elektrooptycznych.

Możliwe są dwa warianty azymutu analizatora ±45°. Wektor Jonesa światła przechodzącego

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma} \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} |\mathcal{E}_0| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{8.4}$$

gdzie górne znaki „+” dotyczą analizatora o azymucie +45°, a dole „−” dotyczą −45°.

c.d. klasyczny układ do pomiarów elektrooptycznych

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma} \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} |\mathcal{E}_0| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{8.4}$$

Stąd, natężenie przechodzącego światła

$$I = |\mathcal{E}_x|^2 + \left|\mathcal{E}_y\right|^2 = \tfrac{1}{2}|\mathcal{E}_0|^2 T^2 (1 \mp \sin\Gamma), \tag{8.5}$$

W celu usunięcia zależności od $\mathcal{E}_0$ i T wyznacza się względną zmianę natężenia światła pod wpływem przyłożonego pola elektrycznego E. Przyjmując $\Gamma_0 = 0$ i $\Gamma \ll 1$ otrzymujemy

$$\frac{I(E) - I(0)}{I(0)} = \mp \sin\Gamma(E) \approx \mp\Gamma(E). \tag{8.6}$$

Zalety metody: prostota.

Wady metody:

1. Metoda jest odpowiednia tylko do próbek $\Gamma_0 = 0$ i wykazuje dużą wrażliwość na odchylenia od tego założenia, np. z powodu dwójłomności kuwety, w której umieszczono próbkę.
2. Niedokładność różnicy faz w płytce ćwierćfalowej powoduje obniżenie dokładności pomiaru w takim samym stopniu jak odchylenie od założenia $\Gamma_0 = 0$.
3. Trudno wyznaczyć poprawkę na niepełną interferencję, która prowadzi do osłabienia wpływu zmian Γ : $I = ½|\mathcal{E}_0|^2 T^2 (1 \mp C \sin\Gamma), C < 1$.

c.d. klasyczny układ do pomiarów elektrooptycznych

Natężenie przechodzącego światła

$$I = |\mathcal{E}_x|^2 + \left|\mathcal{E}_y\right|^2 = \tfrac{1}{2}|\mathcal{E}_0|^2 T^2 (1 \mp \sin\Gamma), \qquad (8.5)$$

Przykład 8.1

W celu ilościowego opisania wady z pkt. 1 rozważmy próbkę, dla której

$$\Gamma = \Gamma_0 + \Delta\Gamma(E), \;\; \text{gdzie } \Gamma_0 \neq 0 \text{ i } \Delta\Gamma(E) \ll 1. \qquad (8.7)$$

Podstawienie różnicy faz (8.7) do wzoru (8.5) prowadzi do

$$I = \frac{1}{2}|\mathcal{E}_0|^2 T^2 [1 \mp \sin(\Gamma_0 + \Delta\Gamma)] \approx \tfrac{1}{2}|\mathcal{E}_0|^2 T^2 [1 \mp \sin(\Gamma_0) \mp \Delta\Gamma \cos\Gamma_0]. \qquad (8.8)$$

Stąd, względna zmiana

$$\frac{I(E) - I(0)}{I(0)} \approx \mp \frac{\cos\Gamma_0}{1 \mp \sin\Gamma_0} \Delta\Gamma(E). \qquad (8.9)$$

Przykładowo, jeżeli niezamierzona różnica faz wynosi $\Gamma_0 = 5° \approx 0{,}105$ rad, to

$$\frac{\cos\Gamma_0}{1 \mp \sin\Gamma_0} = \begin{cases} 1{,}11 & \text{dla znaku } -, \\ 0{,}90 & \text{dla znaku } +. \end{cases}$$

Nieznana wartość Γ_0 i użycie uproszczonego wzoru (8.6) przekładają się na błąd metody pomiarowej od −10% do +11% przy $\Gamma_0 = 5°$ i błąd rośnie szybko ze wzrostem wartości Γ_0.

Problem 4 do przećwiczenia

Załóżmy, że:

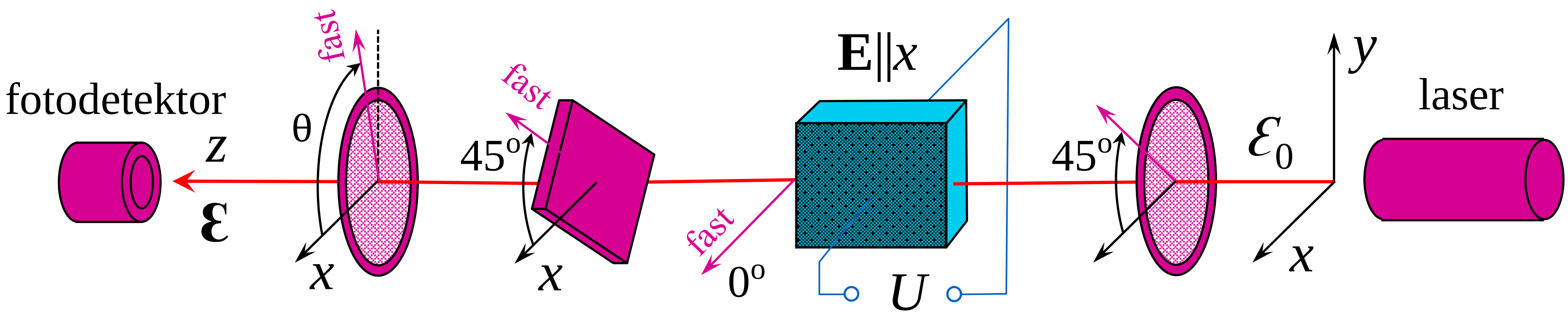
1) całkowita dwójłomność ośrodka w polu elektr. $\Gamma = \Gamma_0 + \Delta\Gamma(E)$ i $\Gamma_0 \neq 0$,
2) wykonano pomiary w układzie z rys. 8.1 dla obu azymutów analizatora +45° i −45° otrzymując wyniki:
   a) $I^{+}(E)$ i $I^{+}(0)$ dla azymutu +45° oraz
   b) $I^{-}(E)$ i $I^{-}(0)$ dla azymutu −45°.

Czy możliwe jest całkowite wyeliminowanie wpływu nieznanej wartości $\Gamma_0 \neq 0$ w celu dokładnego obliczenia $\Delta\Gamma(E)$?

8.2.2. Układ w konfiguracji Sénarmonte

Cechami charakterystycznymi konfiguracji Sénarmonte są:

- możliwość dowolnego ustawiania orientacji analizatora,
- kąt ±45° pomiędzy azymutem fali szybszej w próbce i azymutem płytki ćwierćfalowej.



analizator	λ/4	próbka	polaryzator
$T_f = 1$, $T_s = 0$,	$\Gamma = \pi/2$	$T_f = T_s = T$	$T_f = 1$, $T_s = 0$
θ - zmienne	$\delta = 0°$	$\delta = 0°$, $\Gamma = f(E)$	

Rys. 8.2. Przykładowy układ do pomiarów elektrooptycznych w konfiguracji Sénarmonte.

Dla jednego z wariantów, w którym polaryzator i płytka ćwierćfalowa mają azymut 45°

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma} \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} |\mathcal{E}_0| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{8.10}$$

c.d. Układ w konfiguracji Sénarmonte

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma} \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} |\mathcal{E}_0| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{8.10}$$

Stąd, natężenie przechodzącego światła

$$I = |\mathcal{E}_x|^2 + \left|\mathcal{E}_y\right|^2 = \tfrac{1}{2}|\mathcal{E}_0|^2 T^2 [1 + \sin(2\theta + \Gamma)]. \tag{8.11}$$

Uwzględniając dodatkowo częściową interferencję dwóch fal własnych

$$I = |\mathcal{E}_x|^2 + \left|\mathcal{E}_y\right|^2 = \tfrac{1}{2}|\mathcal{E}_0|^2 T^2 [1 + C\sin(2\theta + \Gamma)],\ \text{gdzie } C \le 1\,. \tag{8.12}$$

Procedura pomiarowa:

1) zmieniając orientację analizatora θ wyznaczyć wartość minimalną I_{min} i wartość maksymalną I_{max} natężenia I,
2) ustawić analizator w pozycji θ odpowiadającej średniej wartości natężenia światła $I(\theta) = I_{\text{śr}} = ½(I_{\mathrm{max}} - I_{\mathrm{min}})$ przy wyłączonym polu elektrycznym, co odpowiada $2\theta + \Gamma_0 = 0$,
3) wyznaczyć zmianę natężenia I spowodowaną załączeniem pola elektrycznego E względem zakresu zmian I przy obrocie analizatora

$$\frac{I(E) - I(0)}{I_{\mathrm{max}} - I_{\mathrm{min}}} = \frac{1}{2}\sin\Delta\Gamma(E) \approx \frac{1}{2}\Delta\Gamma(E). \tag{8.13}$$

8.2.3. Pomiary przy zmianie azymutu fali szybszej w próbce

W przypadku pomiarów liniowego efektu elektrooptycznego w próbce nie wykazującej naturalnej dwójłomności, azymut fali szybszej ulega zmianie o 90° przy zmianie zwrotu przyłożonego pola **E** (jak w dalszym przykładzie 8.2 - pomiar wsp. r_{63}).

Macierz Jonesa opisująca kryształ w obu przypadkach α_f = 0° i 90°:

$$\mathbf{J} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma} \end{bmatrix}, & \text{dla } \alpha_\mathrm{f} = 0°, \\ \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\Gamma} \end{bmatrix}, & \text{dla } \alpha_\mathrm{f} = 90°. \end{cases} \tag{8.14}$$

Wniosek: pomijając wyraz skalarny $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma}$, obrót azymutu o 90° daje taki sam efekt jak zmiana dodatniego znaku różnicy faz Γ na znak ujemny.

Stad, przykładowy wzór (8.6) dotyczący układu z rys. 8.1, gdzie α_f = 0°

$$\frac{I(E) - I(0)}{I(0)} = \mp \sin\Gamma(E) \approx \mp\Gamma(E). \tag{8.6}$$

można uogólnić do postaci

$$\frac{I(E) - I(0)}{I(0)} = \mp a \sin\Gamma(E) \approx \mp a\, \Gamma(E). \tag{8.15}$$

gdzie a = +1 dla α_f = 0° albo a = −1 dla α_f = 90°.

8.2.4. Oddzielanie kwadratowego efektu elektrooptycznego od efektu liniowego

Wiele grup kryształów wykazuje jednocześnie liniowy i kwadratowy efekt elektrooptyczny. Ponieważ efekt kwadratowy jest o kilka rzędów wielkości słabszy od efektu kwadratowego:

- mierząc efekt liniowy można zaniedbać wkład efektu kwadratowego,
- pomiary efektu kwadratowego są prowadzone wyłącznie dla takich kombinacji kierunku światła i kierunku przyłożonego pola elektrycznego, w których efekt kwadratowy jest teoretycznie wygaszony.

Przykładowo dla grupy symetrii $\bar{4}2m$, do której należą m.in. kryształy KDP (KH_2PO_4), ADP ($NH_4H_2PO_4$), oraz RDP (RbH_2PO_4), elementy symetrii determinują postać tensorów:

$B_{ij}\,(E = 0)$	r_{ij}	q_{ij}
$\begin{bmatrix} n_\mathrm{o}^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & n_\mathrm{o}^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & n_\mathrm{e}^{-2} \end{bmatrix},$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{bmatrix},$	$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ q_{12} & q_{11} & q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ q_{31} & q_{31} & q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{66} \end{bmatrix}.$

(8.16)

Wnioski:

- obserwacja wpływu współczynnika r_{63} wymaga pola $\mathbf{E} = (0, 0, E)$,
- kombinacja współcz. q_{11} i q_{31} – pole przyłożone w kierunku $(E, 0, 0)$ albo $(0, E, 0)$.

c.d. Oddzielanie kwadratowego efektu elektrooptycznego od efektu liniowego

Przykład 8.2 – konfiguracja do pomiaru współczynnika r_{63}

Rozważmy pole elektryczne w krysztale KDP w kierunku $\mathbf{E} = (0, 0, E)$ i światło $\mathbf{s} = (0, 0, 1)$. Tensor nieprzenikalności $[B]$ w układzie osi krystalograficznych XYZ

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{22} \\ B_{33} \\ B_{23} \\ B_{13} \\ B_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_\mathrm{o}^{-2} + q_{13}E^2 \\ n_\mathrm{o}^{-2} + q_{13}E^2 \\ n_\mathrm{e}^{-2} + q_{33}E^2 \\ 0 \\ 0 \\ r_{63}E \end{bmatrix}. \tag{8.17}$$

Podstawiając składowe tensora (8.17) do (5.30) i (5.31) otrzymujemy

$$n_\mathrm{f} = \sqrt{\frac{2}{B_{11} + B_{22} + \sqrt{(B_{11} - B_{22})^2 + 4B_{12}B_{21}}}} = \sqrt{\frac{1}{n_\mathrm{o}^{-2} + q_{13}E^2 + |r_{63}E|}} \approx n_\mathrm{o} - \frac{1}{2}n_\mathrm{o}^3|r_{63}E|, \tag{8.18}$$

$$n_\mathrm{s} = \sqrt{\frac{2}{B_{11} + B_{22} - \sqrt{(B_{11} - B_{22})^2 + 4B_{12}B_{21}}}} = \sqrt{\frac{1}{n_\mathrm{o}^{-2} + q_{13}E^2 - |r_{63}E|}} \approx n_\mathrm{o} + \frac{1}{2}n_\mathrm{o}^3|r_{63}E|, \tag{8.19}$$

skąd wynika różnica faz fali wolniejszej i szybszej

$$\Gamma = \frac{2\pi L}{\lambda}(n_\mathrm{s} - n_\mathrm{f}) \approx \frac{2\pi L}{\lambda} n_\mathrm{o}^3|r_{63}E|. \tag{8.20}$$

c.d. Oddzielanie kwadratowego efektu elektrooptycznego od efektu liniowego

Kąt przekątnej fali szybszej wynikający z podstawienia wzoru (8.17) do (5.40)

$$B_{11} = B_{22};\ B_{12} = r_{63}\, E \quad (8.17)$$

$$\sin\beta_\mathrm{f} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{B_{22} - B_{11}}{\sqrt{(B_{11} - B_{22})^2 + 4B_{12}B_{12}^*}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \qquad \beta_\mathrm{f} = 45°, \tag{8.21}$$

zaś różnica faz składowej $\mathcal{E}_x$ do $\mathcal{E}_y$ fali szybszej wynikająca z podstawienia (8.17) do (5.42)

$$B_{12} = r_{63}\, E$$

$$\cos\delta_\mathrm{f} = \frac{\mathrm{Re}[B_{12}]}{|B_{12}|} = \mathrm{sgn}(r_{63}E) \qquad \Rightarrow \qquad \delta_\mathrm{f} = \begin{cases} 180° & \text{dla } r_{63}E < 0, \\ 0° & \text{dla } r_{63}E > 0, \end{cases} \tag{8.22}$$

co oznacza, że azymut fali szybszej

$$\alpha_\mathrm{f} = \begin{cases} -45° & \text{dla } r_{63}E < 0, \\ +45° & \text{dla } r_{63}E > 0. \end{cases} \tag{8.23}$$

Wniosek: Pomiar współczynnika r_{63} w konfiguracji przedstawionej na rys. 8.1 albo 8.2 wymaga obrócenia osi krystalograficznej X o kąt ±45° względem osi x w celu otrzymania azymutów fali szybszej 0° i 90°. Przykładowo, po obróceniu osi X o kąt +45° wzór (8.15) przyjmuje postać

$$\frac{I(E) - I(0)}{I(0)} \approx \pm\frac{2\pi L}{\lambda} n_\mathrm{o}^3 r_{63} E, \tag{8.24}$$

gdzie górny znak „+” dotyczy analizatora o azymucie +45°, a dolny „−” azymutu −45°.

c.d. Oddzielanie kwadratowego efektu elektrooptycznego od efektu liniowego

Przykład 8.3 – konfiguracja do pomiaru kombinacji współczynników g_{11} i g_{31}

Z analizy tensora $[q_{ij}]$ (8.16) wynika, że konieczne jest przyłożenie pola w kierunku $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$ albo $\mathbf{E} = (0, E, 0)$. Wybierając wariant $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$ otrzymujemy

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{22} \\ B_{33} \\ B_{23} \\ B_{13} \\ B_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{XX} \\ B_{YY} \\ B_{ZZ} \\ B_{YZ} \\ B_{XZ} \\ B_{XY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_\mathrm{o}^{-2} + q_{11}E^2 \\ n_\mathrm{o}^{-2} + q_{12}E^2 \\ n_\mathrm{e}^{-2} + q_{31}E^2 \\ r_{41}E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{8.25}$$

Biorąc pod uwagę postać wzorów n_f (5.30) i n_s (5.31), musimy zaproponować transformację z układu osi krystalograficznych XYZ do układu xyz, w którym: $z||\mathbf{s}$ i składowe B_{11} i B_{33} w XYZ stają się B_{11} i B_{22} w xyz. Taką transformacją jest np. obrót wokół osi $X = x$ o kąt −90°:

$$\begin{aligned} B_{xx} &= B_{XX} = n_\mathrm{o}^{-2} + q_{11}E^2, \\ B_{yy} &= B_{ZZ} = n_\mathrm{e}^{-2} + q_{31}E^2, \\ B_{xy} &= -B_{XZ} = 0, \\ \mathbf{s} &= [0,0,1]_{(xyz)} = [0,1,0]_{(XYZ)}. \end{aligned} \tag{8.26}$$

c.d. Oddzielanie kwadratowego efektu elektrooptycznego od efektu liniowego

Podstawiając składowe tensora (8.26) do (5.30) i (5.31) otrzymujemy

$$B_{xx} = n_o^{-2} + q_{11}E^2, \quad B_{yy} = n_e^{-2} + q_{31}E^2, \quad B_{xy} = B_{yx} = 0,$$

$$n_f = \sqrt{\frac{2}{B_{xx} + B_{yy} + \sqrt{\left(B_{xx} - B_{yy}\right)^2 + 4B_{xy}B_{yx}}}} = \sqrt{\frac{1}{n_e^{-2} + q_{31}E^2}} \approx n_e - \frac{1}{2}n_e^3 q_{31}E^2, \quad (8.27)$$

$$n_s = \sqrt{\frac{2}{B_{xx} + B_{yy} - \sqrt{\left(B_{xx} - B_{yy}\right)^2 + 4B_{xy}B_{yx}}}} = \sqrt{\frac{1}{n_o^{-2} + q_{11}E^2}} \approx n_o - \frac{1}{2}n_o^3 q_{11}E^2. \quad (8.28)$$

$n_o^{-2} - n_e^{-2} < 0$ - dla kryształów KDP i ADP

Stąd różnica faz

$$\Gamma = \frac{2\pi L}{\lambda}(n_s - n_f) \approx \frac{2\pi L}{\lambda}\left[n_o - n_e - \frac{1}{2}(n_o^3 q_{11} - n_e^3 q_{31})E^2\right]. \quad (8.29)$$

Azymut fali szybszej α_f w rozważonej konfiguracji jest zdeterminowany przez naturalną dwójłomność liniową i wynosi 90° dla $n_o > n_e$.

Problemy do samodzielnego przećwiczenia:

Zaproponować takie kombinacje kierunku przyłożonego pola elektrycznego **E** i kierunku światła **s** zapisane w układzie osi krystalograficznych *XYZ* w krysztale o symetrii $\bar{4}2m$, które pozwalają na pomiar:

1) $n_{\mathrm{o}}^3(q_{11}-q_{12})$,

2) $n_{\mathrm{o}}^3 q_{13}-n_{\mathrm{e}}^3 q_{33}$,

3) $n_{\mathrm{o}}^3 q_{66}$,

4) $n_{\mathrm{o}}^3 q_{12}-n_{\mathrm{e}}^3 q_{31}-\dfrac{n_{\mathrm{o}}^3+n_{\mathrm{e}}^3}{n_{\mathrm{o}}^3-n_{\mathrm{e}}^3} n_{\mathrm{o}}^2 n_{\mathrm{e}}^2 r_{41}^2$.

8.3. Pomiar naturalnej dwójłomności kołowej

Rozważmy wektor Jonesa fali świetlnej przechodzącej kolejno przez:

- doskonały polaryzator liniowy o azymucie α,
- niedichroiczny ośrodek kołowy ($T_f = T_s = T$, $\beta_f = 45°$, $\delta_f = \pm 90°$) o różnicy faz Γ:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{T}{2}\begin{bmatrix} 1+e^{-i\Gamma} & \mp i\left(1-e^{-i\Gamma}\right) \\ \pm i\left(1-e^{-i\Gamma}\right) & 1+e^{-i\Gamma} \end{bmatrix} |\mathcal{E}_0| \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = \tag{8.30}$$

$$= T|\mathcal{E}_0|e^{-i\Gamma/2}\begin{bmatrix} \cos(\alpha \mp \Gamma/2) \\ \sin(\alpha \mp \Gamma/2) \end{bmatrix}.$$

górne znaki: ośrodek prawoskrętny ($\delta_f = +90°$)

dolne znaki: ośrodek lewoskrętny ($\delta_f = -90°$)

Wniosek: fala spolaryzowana liniowo w płaszczyźnie o dowolnym azymucie α, doznaje podczas przejścia przez lewoskrętny ośrodek kołowy obrotu płaszczyzny polaryzacji o dodatni kąt Γ/2 przy zachowaniu polaryzacji liniowej.

c.d. Pomiar naturalnej dwójłomności kołowej

Uzupełnijmy układ o analizator liniowy umieszczony za ośrodkiem kołowym

$$\mathbf{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} \frac{T}{2} \begin{bmatrix} 1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma} & \mp\mathrm{i}\left(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma}\right) \\ \pm\mathrm{i}\left(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma}\right) & 1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma} \end{bmatrix} |\mathcal{E}_0| \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} =$$

„+" prawoskrętny $\delta_f = +90°$

$$= T|\mathcal{E}_0|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma/2} \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\theta-\alpha\pm\Gamma/2) \\ \sin(\theta)\cos(\theta-\alpha\pm\Gamma/2) \end{bmatrix}. \qquad (8.31)$$

„–" lewoskrętny $\delta_f = -90°$

Stąd, natężenie przechodzącego światła

$$I = |\mathcal{E}_x|^2 + \left|\mathcal{E}_y\right|^2 = T^2|\mathcal{E}_0|^2\cos^2(\theta-\alpha\pm\Gamma/2)\,. \qquad (8.32)$$

Tensor nieprzenikalności $[B_{ij}]$ dla ośrodka o symetrii ∞∞ wyprowadzono we wzorze (6.29)

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} n_0^{-2} & \mathrm{i}n_0^{-4}g_{11}^{(0)} & 0 \\ -\mathrm{i}n_0^{-4}g_{11}^{(0)} & n_0^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & n_0^{-2} \end{bmatrix}. \qquad (6.29)$$

Podstawiając składową B_{xy} tensora (6.29) do wzoru (5.42) otrzymujemy

$$\sin\delta_\mathrm{f} = \frac{\mathrm{Im}[B_{xy}^*]}{\left|B_{xy}\right|} \qquad \Rightarrow \qquad \delta_\mathrm{f} = -90°\,\mathrm{sgn}\left(g_{11}^{(0)}\right). \qquad (8.33)$$

$$I = T^2|\mathcal{E}_0|^2\cos^2\left[\theta-\alpha-\mathrm{sgn}\left(g_{11}^{(0)}\right)\Gamma/2\right]. \qquad (8.34)$$

c.d. Pomiar naturalnej dwójłomności kołowej

$$I = T^2|\mathcal{E}_0|^2\cos^2\left[\theta - \alpha - \mathrm{sgn}\left(g_{11}^{(0)}\right)\Gamma/2\right]. \tag{8.34}$$

Metoda pomiaru:

- próbka jest początkowo wyjęta, co odpowiada $\Gamma = 0$, ustawiony kąt θ odpowiada $I = I_{\mathrm{min}}$,
- jeśli wstawienie próbki wymaga obrotu analizatora o $\Delta\theta$ w celu przywrócenia $I = I_{\mathrm{min}}$, to

$$2\,\Delta\theta = \mathrm{sgn}\left(g_{11}^{(0)}\right)\Gamma. \tag{8.35}$$

Podstawiając składowe tensora (6.29) do wzorów (5.30) i (5.31) otrzymujemy

$$n_{\mathrm{f}} = \sqrt{\frac{2}{B_{xx} + B_{yy} + \sqrt{\left(B_{xx} - B_{yy}\right)^2 + 4B_{xy}B_{yx}}}} = \sqrt{\frac{1}{n_0^{-2} + n_0^{-4}\left|g_{11}^{(0)}\right|}} \approx n_0 - \frac{1}{2}n_0^{-1}\left|g_{11}^{(0)}\right|, \tag{8.36}$$

$$n_{\mathrm{s}} = \sqrt{\frac{2}{B_{xx} + B_{yy} - \sqrt{\left(B_{xx} - B_{yy}\right)^2 + 4B_{xy}B_{yx}}}} = \sqrt{\frac{1}{n_0^{-2} - n_0^{-4}\left|g_{11}^{(0)}\right|}} \approx n_0 + \frac{1}{2}n_0^{-1}\left|g_{11}^{(0)}\right|, \tag{6.37}$$

$$\Gamma = \frac{2\pi L}{\lambda}(n_{\mathrm{s}} - n_{\mathrm{f}}) \approx \frac{2\pi L}{\lambda}n_0^{-1}\left|g_{11}^{(0)}\right|. \tag{8.38}$$

Podstawiając wzór (8.41) do (8.38) otrzymujemy ostatecznie

$$g_{11}^{(0)} = \frac{\lambda n_0}{\pi L}\Delta\theta. \tag{8.39}$$

Literatura do tematu 8

[6] F. Ratajczyk, „*Dwójłomność i polaryzacja optyczna*", Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2000.

Literatura specjalistyczna w języku angielskim do rozdziału 8.2:

[a] M. Aillerie, N. Théofanous, M.D. Fontana, „Measurement of the electro-optic coefficients: Description and comparison of the experimental techniques", *Applied Physics B*, vol. 70 (2000), str. 317–334.
doi: 10.1007/s003400000237

[b] M. Aillerie, F. Abdi, M.D. Fontana, N. Théofanous, E. Abarkan, „Accurate measurements of the electro-optic coefficients and birefringence changes using an external modulation signal", Review of Scientific Instruments, vol. 71 (2000), str. 1627–1634. doi: 10.1063/1.1150508