

JOANNA KUCNER^{*1}, BOŻENA ŚWIĄTEK^{†1}

O PEWNYM RÓWNANIU W ZBIORZE LICZB ZESPOŁONYCH

¹ Centre of Mathematics and Physics, Lodz University of Technology, Al. Politechniki 11, 93-590 Łódź, Poland

Artykuł opisuje pewne równanie w zbiorze liczb zespolonych, które można rozwiązać kilkoma metodami odwołującymi się do różnych własności (zwłaszcza liczb zespolonych). Autorki wskazują także dydaktyczne zalety zapoznania studentów z tymi metodami.

Keywords: liczby zespolone, równania wielomianowe.

1. WSTĘP

Liczby zespolone zostały wprowadzone w XVI wieku na potrzeby algebry. Okazało się bowiem, że poprzez dopuszczenie pierwiastków z liczb ujemnych można wyprowadzać ogólne wzory do rozwiązywania równań trzeciego stopnia [1]. Liczby zespolone zostały następnie wykorzystane w innych zagadnieniach matematycznych, np. w rozwiązywaniu równań różniczkowych [2], w obliczaniu całek oznaczonych z funkcji rzeczywistych przy pomocy reszduów [3]. Po wielu latach okazało się, że ten tak pozornie abstrakcyjny dział matematyki ma zastosowanie w wielu innych dziedzinach nauki. Przykładowo w elektrotechnice liczby zespolone przydają się one do analizy obwodów elektrycznych prądu przemiennego, wyrażając jego moc czynną oraz bierną [4]. Ponadto ułatwiają obliczanie prądów zwarciovych [4], co w praktyce przekłada się na płynną i nieprzerwaną dystrybucję prądu, np. do mieszkań.

Liczby zespolone pomagają w analizowaniu i modelowaniu złożonych zagadnień, które pojawiają się w grafice komputerowej i modelowaniu 3D [5], w funkcjach falowych w fizyce kwantowej [6], w dynamice płynów i aerodynamice [7], w teorii sygnałów i przetwarzania danych [8], w teorii chaosu i dynamiki nieliniowej [9]. Liczby zespolone są też kluczowe przy tworzeniu efektów filmowych, a ze względu na liczne zastosowania są wbudowane w niektórych językach programowania, np. w Fortran czy Python [10].

To wszystko sprawia, że liczby zespolone są tematem omawianym na wielu kierunkach na uczelniach wyższych. Jednak liczba godzin przeznaczona na to zagadnienie pozwala przedstawić słuchaczom tylko podstawy pozwalające posługiwać się liczbami zespolonymi, bez poruszania takich zagadnień, jak na przykład analiza zespolona.

Jednym z tematów, jakie wchodzi w zakres realizowanego materiału, jest rozwiązywanie równań w zbiorze liczb zespolonych [11]. W poniższym artykule chcemy rozważyć jedno z takich równań, które rozwiązać możemy na kilka sposobów z których każdy ma pewne walory dydaktyczne.

^{*}joanna.kucner@p.lodz.pl[†]bozena.swiatek@p.lodz.pl

2. ZESPOLONE RÓWNANIE WIELOMIANOWE

2.1. Metoda pierwsza

Rozważmy równanie:

$$z^3 - 8 = 0. \quad (1)$$

Jest ono oczywiście równoważne równaniu:

$$z^3 = 8, \quad (2)$$

a zatem, aby znaleźć rozwiązania równania (2), wystarczy policzyć pierwiastki trzeciego stopnia z liczby 8. Można to zrobić wykorzystując postać trygonometryczną liczby zespolonej. Łatwo policzyć, że $|8| = 8$, a argument tej liczby wynosi: $\phi = 0$. Obliczamy zatem pierwiastki z liczby 8 korzystając ze wzoru na pierwiastki n -tego stopnia z liczby zespolonej $z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$, które możemy zapisać w postaci [11]

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\phi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\phi + 2k\pi}{n} \right), \quad (3)$$

gdzie $k = 0, 1, \dots, n - 1$. A zatem

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{0 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} + i \sin \frac{0 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} \right) = 2(\cos 0 + i \sin 0) = 2(1 + 0i) \quad (4) \\ &= 2 \\ w_1 &= \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{0 + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} + i \sin \frac{0 + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) \\ &= -1 + \sqrt{3}i \\ w_2 &= \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{0 + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} + i \sin \frac{0 + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi \right) \\ &= -1 - \sqrt{3}i. \end{aligned}$$

2.2. Metoda druga

Drugi – i chyba najkrótszy – sposób rozwiązania równania (1) polega na skorzystaniu ze wzoru na różnicę sześcianów:

$$\begin{aligned} z^3 - 8 = 0 &\iff z^3 - 2^3 = 0 \iff (z - 2)(z^2 + 2z + 4) = 0 \iff \\ &\iff z = 2 \quad \vee \quad z^2 + 2z + 4 = 0 \iff \\ &\iff z_1 = 2 \quad \vee \quad z_2 = -1 - \sqrt{3}i \quad \vee \quad z_3 = -1 + \sqrt{3}i. \end{aligned}$$

2.3. Metoda trzecia

W trzecim sposobie rozwiązania równania (1) wykorzystamy postać kartezjańską liczby zespolonej z . Możemy zapisać, że

$$z = x + iy,$$

dla pewnych $x, y \in \mathbb{R}$. Wówczas równanie (1) przyjmie postać:

$$(x + iy)^3 - 8 = 0 \implies x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i = 8. \quad (5)$$

Liczby zespolone są sobie równe wtedy i tylko wtedy gdy mają równe części rzeczywiste i urojone, a zatem:

$$x^3 - 3xy^2 = 8, \quad (6a)$$

$$3x^2y - y^3 = 0. \quad (6b)$$

Zajmijmy się równaniem (6b):

$$y(3x^2 - y^2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = 0 \quad \vee \quad (\sqrt{3}x - y)(\sqrt{3}x + y) = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad y = 0 \quad \vee \quad y = \sqrt{3}x \quad \vee \quad y = -\sqrt{3}x.$$

Rozpatrzmy równanie (6a):

- dla $y = 0$ równanie (6a) przyjmuje postać $x^3 - 8 = 0$, zatem $x = 2$;
- dla $y = \sqrt{3}x$ równanie (6a) przyjmuje postać $x^3 - 3x \cdot 3x^2 - 8 = 0$. Doprowadzając lewą stronę do najprostszej postaci otrzymujemy $-8x^3 - 8 = 0$, a stąd $x = -1$;
- dla $y = -\sqrt{3}x$ równanie (6a) przyjmuje taką samą postać jak w poprzednim przypadku, zatem i tu również $x = -1$.

Podsumowując, mamy trzy rozwiązania układu równań (6a) i (6b), (a więc i równania (1)):

$$z_1 = 2, \quad z_2 = -1 + \sqrt{3}i, \quad z_3 = -1 - \sqrt{3}i.$$

2.4. Metoda czwarta

W czwartym sposobie rozwiązania równania (1) wykorzystamy fakt, że pierwiastki n -tego stopnia z liczby zespolonej z dzielą okrąg o promieniu $r = \sqrt[n]{|z|}$ na n równych łuków [11]. Jedno rozwiązanie równania (1) łatwo jest odgadnąć:

$$z_1 = 2$$

(argument główny tej liczby to $\phi = 0$). Zatem pozostałe pierwiastki z liczby 8 muszą być liczbami zespolonymi o argumentach $\frac{2}{3}\pi$ oraz $\frac{4}{3}\pi$ (bo $2\pi : 3 = \frac{2}{3}\pi$, $0 + \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$ oraz $\frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$). Stąd obliczamy (wykorzystując wzory redukcyjne) pozostałe pierwiastki równania:

$$z_2 = 2(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi) = 2[\cos(\pi - \frac{\pi}{3}) + i \sin(\pi - \frac{\pi}{3})] = 2(-\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) =$$

$$= 2(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -1 + \sqrt{3}i,$$

oraz analogicznie

$$z_3 = 2(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi) = 2[\cos(\pi + \frac{\pi}{3}) + i \sin(\pi + \frac{\pi}{3})] = 2(-\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}) =$$

$$= 2(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -1 - \sqrt{3}i.$$

3. PODSUMOWANIE

Od wielu lat prowadzimy zajęcia dla studentów na różnych wydziałach Politechniki Łódzkiej, na których matematyka nie jest przedmiotem kierunkowym. Zazwyczaj jej nauczanie ogranicza się do dwóch semestrów, z czego łącznie kilkanaście godzin przeznaczonych jest na wykład i ćwiczenia z liczb zespolonych. Ponadto wśród naszych studentów dość rzadko spotyka się osoby szczególnie interesujące się matematyką. Niech świadczy o tym fakt, że niewielu z nich zadaje proste pytanie: "Po co są liczby zespolone?", a jeszcze mniej z nich zna na nie odpowiedź. Dobrze więc, że zagadnienie to jest omawiane na zajęciach.

Musimy przyznać, że podstawy teorii liczb zespolonych (działania oraz równania w zbiorze liczb zespolonych) są często przyjmowane przez słuchaczy, którzy po raz pierwszy się z nimi spotykają, z pewną ciekawością, jako coś zaskakującego (np. fakt, że w zbiorze liczb zespolonych każde równanie kwadratowe ma przynajmniej jedno rozwiązanie czy też fakt, że pierwiastek n -tego stopnia z liczby zespolonej różnej od 0 ma n różnych wartości). Pewną trudność stanowi jednak konieczność posługiwania się w niektórych zadaniach trygonometrią (zwłaszcza wzorami redukcyjnymi).

Odnosząc się bezpośrednio do równania (1), uważamy, że warto poświęcić czas na rozwiązanie tego równania (bądź równania o podobnym stopniu trudności) na ćwiczeniach wszystkimi przedstawionymi metodami. Pierwszy sposób pozwala na nowo przypomnieć wprowadzoną na wykładzie definicję pierwiastka n -tego stopnia w zbiorze liczb zespolonych. Z naszych obserwacji wynika, że studenci rzadko potrafią skojarzyć rozwiązywanie tego równania z koniecznością obliczenia pierwiastków trzeciego stopnia z liczby 8. Oczywiście zaletą dydaktyczną tego sposobu jest również utrwalenie pojęcia postaci trygonometrycznej liczby zespolonej i wzoru Moivre'a.

Drugi sposób jest okazją do przypomnienia, że w zbiorze liczb zespolonych każde równanie kwadratowe ma rozwiązanie oraz powtórzenie sposobu rozwiązywania takich równań. W dalszym toku nauczania matematyki będzie to dla studentów niezbędną umiejętnością, choćby przy zagadnieniach związanych z równaniami różniczkowymi liniowymi rzędu drugiego. Drugi sposób daje również sposobność poznania lub przypomnienia wzoru na różnicę sześcianów, który pozwala uniknąć procedury dzielenia wielomianów.

Trzeci z kolei sposób jest okazją do przypomnienia warunku na równość dwóch liczb zespolonych zapisanych w postaci kartezjańskiej. Ponadto zaletą pod względem dydaktycznym jest tu konieczność rozwiązywania otrzymanego nieliniowego układu równań i właściwego zinterpretowania otrzymanych wyników, z czym nierzadko studenci spotykają się po raz pierwszy.

Czwarty sposób pozwala przypomnieć geometryczną interpretację pierwiastków z liczby zespolonej. Z naszego doświadczenia wynika, że przez te wszystkie lata tylko jeden student połączył taką interpretację z rozwiązaniem równania (1), mimo że było to zagadnienie omawiane na wcześniejszych zajęciach.

Reasumując: naszym zdaniem – mimo małej ilości czasu, jaką można na zajęciach ze studentami przeznaczyć na kwestie związane z liczbami zespolonymi – warto w ramach podsumowania tej tematyki rozwiązać zaproponowane przez nas równanie (1) każdą z przedstawionych metod. Uważamy, że warto to zrobić nie tylko w celu uświadomienia studentom, że istnieją różne sposoby podejścia do tego samego zadania, ale że jest to również okazja do utrwalenia pewnych zagadnień, pojęć i technik z teorii liczb zespolonych.

LITERATURA

- [1] Hołubowski W., Pleszczyński M., Różański M., Słowik R., Smuda A., Wituła R., *Liczby zespolone. Tom 1. Podstawowe operacje na liczbach zespolonych*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2023.
- [2] Krywicki W., Włodarski L., *Analiza matematyczna w zadaniach, cz. 2*, Wydawnictwo PWN, Warszawa 2011.
- [3] Kącki E., Siewierski L., *Wybrane działy matematyki wyższej z ćwiczeniami*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Informatyki w Łodzi, Łódź 2002.
- [4] Bolkowski S., *Teoria obwodów elektrycznych*, Wydawnictwo WNT Warszawa 2016.
- [5] Vince J., *Mathematics for Computer Graphics*, Springer-Verlag, London 2006.
- [6] Kryszewski S., *Mechanika kwantowa*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 2018.
- [7] Jeżowiecka K., Szewczyk H., *Mechanika płynów*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2001.
- [8] Oppenheim A.V., Schaffer R.W., *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Sulejówek 1979.
- [9] Awrejcewicz J., *Tajemnice nieliniowej dynamiki*, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 1997.
- [10] Saha A., *Matematyka w Pythonie*, Wydawnictwo Helion, Gliwice 2021.
- [11] Dobrowolska K., Dyczka W., Jakuszenkow H., *Matematyka dla studentów studiów technicznych cz. 1*, Wydawnictwo Helpmath, Łódź 1996.