

Mechanika teoretyczna
wykłady dla studentów Fizyki Technicznej
r.ak. 2020/21

Grzegorz W. Bąk

Politechnika Łódzka, 2020

WSTĘP

Podstawowy kurs fizyki doświadczalnej dzielony jest zwykle na mechanikę, termodynamikę i fizykę molekularną, elektryczność i magnetyzm, optykę, fizykę atomu i jądra atomowego. Czasem kurs fizyki doświadczalnej jest uzupełniany elementarnym wstępem do mechaniki kwantowej. Początkową częścią kursu fizyki jest zawsze mechanika, ponieważ inne obszary fizyki nie mogłyby być studiowane bez opisu ruchu i jego przyczyn.

Kurs mechaniki zawiera *kinematykę*, która zajmuje się opisem ruchu bez wnikania w jego przyczyny, *dynamikę* zajmującą się opisem przyczyn zmian ruchu oraz *statykę*, która zajmuje się stanami równowagi układów ciał.

Dynamika punktu materialnego opisana jest wektorowym równaniem Newtona:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

gdzie $\vec{p} = m\vec{v}$ jest pędem punktu zaś \vec{F} jest siłą. Powyższe równanie jest wynikiem doświadczenia i nie może być wyprowadzone z innych praw fizyki. Jest to równanie wektorowe równoważne trzem równaniom skalarnym:

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x$$

$$\frac{dp_y}{dt} = F_y$$

$$\frac{dp_z}{dt} = F_z$$

Aby rozwiązać problem mechaniczny, tzn. określić ruch ciała wynikający z działania siły F na ciało, musimy rozwiązać powyższy układ równań. W niektórych przypadkach może to być niełatwym zadaniem, szczególnie gdy mamy do czynienia z ruchami nieswobodnymi. Mechanika teoretyczna oferuje metody znacznie ułatwiające rozwiązania ruchu wielu złożonych układów fizycznych. Ten wstępny kurs mechaniki teoretycznej przedstawia podstawowe metody mechaniki lagranżanowskiej (sformułowanej poprzez równania Lagrangea) oraz elementy hamiltonowskiego sformułowania mechaniki (rozdział 3) niezbędne dla zrozumienia wstępu do mechaniki kwantowej.

Zakładamy, że student zna i rozumie podstawowe pojęcia i metody matematyczne w zakresie pierwszego roku studiów fizyki, analizy matematycznej i algebry.

SPIS TREŚCI

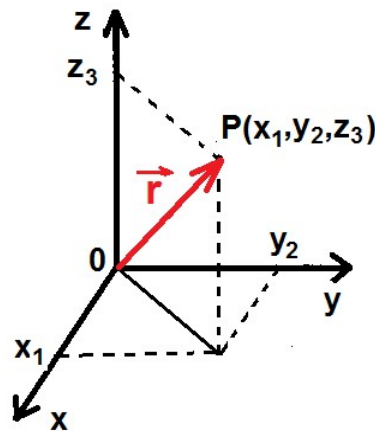
1. Podstawowe pojęcia mechaniki
 - 1.1. Przyspieszenie styczne i normalne
 - 1.2. Radialna i transwersalna składowa prędkości i przyspieszenia
 - 1.3. Ruch i siła, II zasada dynamiki Newtona
 - 1.3.1. Zasada zachowania pędu
 - 1.3.2. Zasada zachowania energii
 - 1.3.2.1. Pole potencjalne i pole zachowawcze
 - 1.3.3. Zasada zachowania momentu pędu
 - 1.4. Siła centralna
 - 1.4.1. Wzór Bineta
 - 1.5. Ruch nieswobodny punktu materialnego
 - 1.5.1. Więzy, siły reakcji więzów
 - 1.5.2. Praca sił reakcji więzów
 - 1.5.3. Ruch na powierzchni
 - 1.5.4. Ruch wzdłuż krzywej
 - 1.5.4.1. Funkcje Gamma i Beta jako przykłady funkcji specjalnych
 - 1.6. Zasada d'Alemberta
 - 1.6.1. Ruch swobodnego punktu materialnego
 - 1.6.2. Ruch punktu materialnego po powierzchni
 - 1.6.3. Ruch punktu materialnego wzdłuż krzywej
 - 1.7. Przesunięcie rzeczywiste, możliwe i przygotowane (wirtualne)
 - 1.8. Nieswobodny ruch punktu materialnego, przesunięcie przygotowane punktu nieswobodnego
 - 1.9. Stopnie swobody układu punktów materialnych
 - 1.10. Przesunięcie przygotowane układu punktów materialnych
 - 1.11. Przestrzeń konfiguracyjna
 - 1.12. Prawa ruchu nieswobodnego układu punktów materialnych
 - 1.13. Zasada d'Alemberta w przestrzeni konfiguracyjnej
 - 1.14. Zasada prac przygotowanych
2. Równania Lagrangea
 - 2.1. Równania Lagrangea pierwszego rodzaju
 - 2.2. Równania Lagrangea drugiego rodzaju
 - 2.2.1. Zasada d'Alemberta we współrzędnych uogólnionych
 - 2.3. Niezmienniki równań Lagrangea
 - 2.3.1. Współrzędne cykliczne
 - 2.3.1.1. Funkcja Lagrangea niezależna od położenia w przestrzeni (przestrzeń jednorodna)
 - 2.3.1.2. Funkcja Lagrangea niezależna od obrotów (przestrzeń izotropowa)
 - 2.3.1.3. Funkcja Lagrangea niezależna jawnie od czasu (jednorodny czas)
3. Przestrzeń fazowa, równania Hamiltona
 - 3.1. Równania Hamiltona
4. Całki ruchu, nawiasy Poissona
 - 4.1. Nawiasy Poissona
 - 4.1.1. Równanie ruchu wielkości fizycznej $F(q,p,t)$
 - 4.1.2. Twierdzenia Poissona-Jacobiego

1. POJĘCIA PODSTAWOWE

Długość i czas - długość jest miarą rozmiarów ciał, czas jest miarą długości trwania zjawisk. Definicja tych wielkości jest w pewnym stopniu zadaniem filozoficznym. Podczas naszych zajęć będziemy uważali obydwie te wielkości fizyczne za zrozumiałe.

Punkt materialny – ciało o znikomych rozmiarach i skończonej masie. Punkt materialny jest zwykle pewnym przybliżeniem rozważanego ciała. Używając tego przybliżenia należy być świadomym jego ograniczeń. Dla przykładu pojęcie punktu materialnego dobrze służy opisowi ruchu Ziemi po orbicie okołosłonecznej, lecz zawodzi gdy opisujemy ruch wirującej piłeczki pingpongowej.

Położenie punktu materialnego podajemy w stosunku do pewnego wybranego układu współrzędnych za pomocą **wektora położenia** $\vec{r} = \vec{i} x_1 + \vec{j} y_1 + \vec{k} z_1$.



Rys.1.1. Położenie punktu materialnego jest opisane za pomocą wektora $\vec{r} = \vec{i} x_1 + \vec{j} y_1 + \vec{k} z_1$. Wybór właściwego układu współrzędnych może znacznie ułatwić czytelny opis zjawiska.

Zauważmy, że powyższe równanie zawiera w sobie dwa fundamentalne założenia fizyczne:

- Przestrzeń fizyczna jest trójwymiarowa. Jak wiemy, założenie to dobrze funkcjonuje w mechanice klasycznej, zawodzi jednak w przypadkach ruchów z prędkością porównywalną z prędkością światła lub zjawisk w bardzo silnych polach grawitacyjnych opisywanych przez teorię względności.
- Jest możliwe dokładne określenie położenia punktu materialnego. Jak wiemy założenie to zawodzi w mikroświecie, gdzie zgodnie z zasadą nieoznaczoności Heisenberga jednoczesne określenie położenia i pędu ograniczone jest wielkością stałej Plancka.

Jak wynika z powyższej krótkiej dyskusji założenie trójwymiarowości przestrzeni fizycznej ma duże znaczenie fizyczne.

Ruch i tor są dane poprzez zależność od czasu wektora położenia:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (1.2)$$

Wektor położenia w układzie kartezjańskim może być zapisany w postaci:

$$\vec{r}(t) = \vec{i} x(t) + \vec{j} y(t) + \vec{k} z(t) \quad (1.3)$$

Równanie (1.3) jest równoważne parametrycznym równaniom toru:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Zakładamy, że funkcje (1.4) są podwójnie różniczkowalne.

Prędkość punktu materialnego jest dana przez:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad (1.5)$$

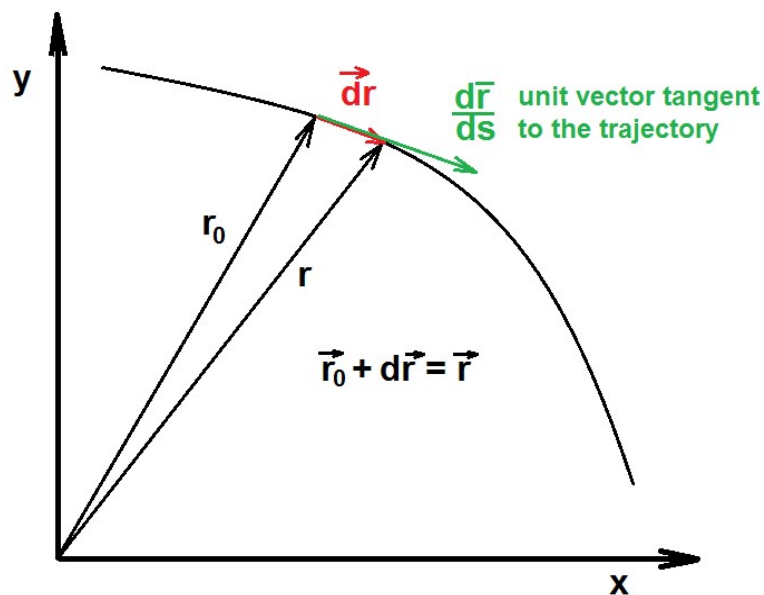
Mamy więc:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} \left(x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k} \right) = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k} \quad (1.6)$$

Odległość przebywana przez punkt materialny równa jest długości toru i dana jest przez:

$$s = s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \quad (1.7)$$

Rozważmy wyrażenie $\frac{d\vec{r}}{ds}$ (rys.1.2). $d\vec{r}$ jest wektorem stycznym do toru gdy $|d\vec{r}|$ dąży do zera. Wielkość $\frac{d\vec{r}}{ds}$ jest przeto wektorem jednostkowym stycznym do toru ruchu.



Rys.1.2. Wektor $\frac{d\vec{r}}{ds}$ jest styczny do toru ruchu i jest wektorem jednostkowym ponieważ długość różniczkowo małej zmiany wektora położenia $d\vec{r}$ dla różniczkowo małej zmiany czasu dt jest równa odległości ds przebytej przez poruszający się punkt materialny.

Wektor położenia może być uważany za funkcję złożoną postaci $\vec{r} = \vec{r}(s(t))$. Stosując wektor styczny $\frac{d\vec{r}}{ds}$ przestawiony na rys.1.2 możemy napisać:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \vec{t}v \quad (1.8)$$

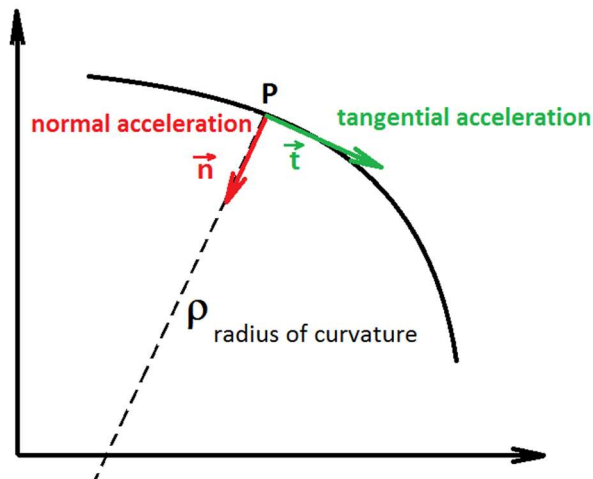
\vec{t} jest tutaj wektorem jednostkowym stycznym do toru ruchu punktu, v jest szybkością, s jest długością toru przebytego w czasie ruchu. Z równania (1.8) wynika że w przypadku ruchu krzywoliniowego prędkość jest styczna do toru ruchu.

Przyspieszenie punktu materialnego jest zdefiniowane równaniem:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}) = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \quad (1.9)$$

1.1. Składowe styczna i normalna przyspieszenia

Założmy że dany jest ruch krzywoliniowy o torze przedstawionym na rys.1.3.



Rys.1.3. Przykład toru ruchu krzywoliniowego. ρ jest promieniem krzywizny toru w punkcie P. Wersory \vec{n} i \vec{t} są jednostkowymi wektorami odpowiednio normalnym i prostopadłym do toru ruchu w punkcie P.

Zależność pomiędzy szybkością zmiany wersora \vec{t} i promieniem krzywizny określa równanie Freneta:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\rho} \quad (1.10)$$

W którym ds jest różniczkową długością przebytego przez poruszający się punkt toru. $d\vec{t}/ds$ opisuje zmianę kierunku wersora \vec{t} która jest odwrotnie proporcjonalna do wartości promienia krzywizny toru ρ . Obliczmy przyspieszenie w ruchu krzywoliniowym po torze przedstawionym na rys. 1.10.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \vec{t} \right) = \frac{d}{dt} (v\vec{t}) = \dot{v}\vec{t} + v \frac{d\vec{t}}{dt} = \dot{v}\vec{t} + v \frac{d\vec{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{v}\vec{t} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n} \quad (1.11)$$

Otrzymujemy więc że styczna do toru ruchu składowa przyspieszenia wynosi:

$$a_t = \dot{v} \quad (1.12)$$

zaś składowa normalna do toru ruchu ma postać:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad (1.13)$$

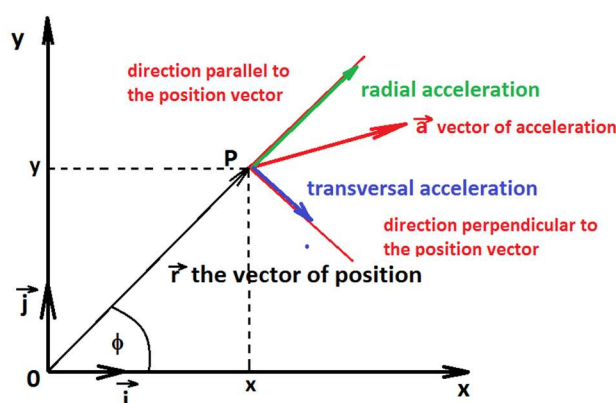
W przypadku jednostajnego ruchu po okręgu składowa normalna przyjmuje dobrze znaną postać:

$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad (1.14)$$

gdzie R jest promieniem okręgu.

1.2. Radialna i transwersalna składowa prędkości i przyspieszenia

Założmy, że mamy do czynienia z płaskim ruchem krzywoliniowym opisanym w ustalonym układzie współrzędnych (rys.1.4). Niech wektor położenia \vec{r} określa położenie punktu w pewnej chwili czasu. Składowe dowolnego wektora (np. prędkości lub przyspieszenia) wzdłuż kierunku będącego przedłużeniem wektora położenia noszą nazwę składowych radialnych, składowe wzdłuż kierunku prostopadłego do kierunku składowych radialnych zwane są składowymi transwersalnymi. Znajomość składowych radialnych i transwersalnych prędkości i przyspieszenia jest pożyteczna przy rozwiązywaniu licznych problemów mechanicznych dotyczących ruchów płaskich.



Rys.1.4. Radialna i transwersalna składowa przyspieszenia w punkcie P .

Położenie punktu na płaszczyźnie dane jest równaniem:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad (1.15)$$

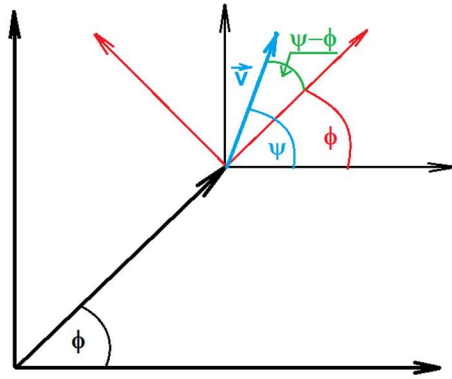
Na płaszczyźnie zespolonej położenie punktu można zapisać na dwa sposoby:

$$z = x + iy = re^{i\phi} \quad (1.16)$$

gdzie $i = \sqrt{-1}$ jest jednostką urojoną zaś ϕ jest kątem pokazanym na rys.1.4. Różniczkując (1.16) względem czasu otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \dot{r}e^{i\phi} + ir\dot{\phi}e^{i\phi} = (\dot{r} + ir\dot{\phi})e^{i\phi} \\ \ddot{z} &= \{\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 + i(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\}e^{i\phi} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Obliczając rzeczywistą i urojoną część tych wyrażeń otrzymujemy składowe prędkości i przyspieszenia wzdłuż osi x i y . Aby otrzymać składowe radialną i transwersalną musimy obrócić układ współrzędnych o kąt ϕ jak pokazano na rys.1.5.



Rys.1.5. Aby znaleźć składowe wektora \vec{v} w „czerwonym” układzie współrzędnych musimy obrócić układ o kąt ϕ .

Wektor v w „czarnym” układzie współrzędnych jest dany przez:

$$v_x + iv_y = ve^{i\varphi} \quad (1.18)$$

Natomiast w układzie „czerwonym” dany jest przez:

$$v_r + iv_\varphi = ve^{i(\psi-\varphi)} \quad (1.19)$$

p_r i p_φ są składowymi równoległą i prostopadłą do wektora położenia \vec{r} , innymi słowy są to składowe radialna i transwersalna. Wynika stąd że aby otrzymać składowe radialną i transwersalną prędkości i przyspieszenia należy pomnożyć równania (1.17) przez $\exp(i\phi)$. W rezultacie otrzymujemy:

	Składowe radialne	Składowe transwersalne
prędkość	\dot{r}	$r\dot{\phi}$
przyspieszenie	$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2$	$2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}$

1.3. Siła i ruch, druga zasada dynamiki Newtona

Z punktu widzenia mechaniki skutkiem przyłożenia siły do ciała jest zmiana ruchu tego ciała. Miarą zmiany ruchu jest przyspieszenia, relacja pomiędzy wielkością działającej siły a spowodowanym przez tę siłę przyspieszeniem znana jest jako II zasada dynamiki Newtona:

$$m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad (1.20)$$

m jest tutaj masą bezwładną ciała. Jeśli przyłożymy tę samą siłę do pewnej ilości ciał to otrzymamy związek:

$$m_i\vec{a}_i = m_j\vec{a}_j = (m_i + m_j)\vec{a}_{i+j} \quad (1.21)$$

Wynika z powyższych równań że masa jest wielkością addytywną, tzn.:

$$m_{i+j} = m_i + m_j \quad (1.23)$$

gdzie m_{i+j} jest masą ciała składającego się z ciał o masach m_i oraz m_j .

Równanie (1.20) jest równoważne trzem równaniami skalarnymi:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= F_x \\
m\ddot{y} &= F_y \\
m\ddot{z} &= F_z
\end{aligned}
\tag{1.22}$$

Biorąc pod uwagę związek $\ddot{\vec{r}} = d\vec{v}/dt$ otrzymujemy (zakładając stałość masy m):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}
\tag{1.23}$$

Równanie (1.23) jest bardziej ogólną formą równania (1.20). Obliczając całkę (1.23) względem czasu otrzymujemy:

$$\int_{t_0}^t \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \vec{p} - \vec{p}_0 = \int_{t_0}^t \vec{F} dt
\tag{1.24}$$

Całka $\int_{t_0}^t \vec{F} dt$ zwana jest popędem siły \vec{F} .

WSTAWKA: Gdy popęd siły jest równy zeru, pęd ciała pozostaje stały. Prowadzi to do zasady zachowania pędu. Popęd siły może być równy zeru albo gdy siła jest równa zeru lub gdy czas działania siły jest równy (bliski) zeru.

1.3.1. Zasada zachowania pędu

Gdy popęd siły jest równy zeru zachodzi:

$$\vec{p} = \vec{p}_0
\tag{1.25}$$

co oznacza że pęd ciała pozostaje stały.

1.3.2. Zasada zachowania energii, pole potencjalne

Załóżmy, że na poruszający się punkt materialny działa zależna od czasu siła $F(t)$. Równanie ruchu tego ciała ma wtedy postać:

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}(t)
\tag{1.26}$$

Mnożąc (1.26) przez wektor prędkości \vec{v} i biorąc pod uwagę $\frac{d}{dt}(\vec{v}^2) = 2\vec{v}\dot{\vec{v}}$ otrzymujemy:

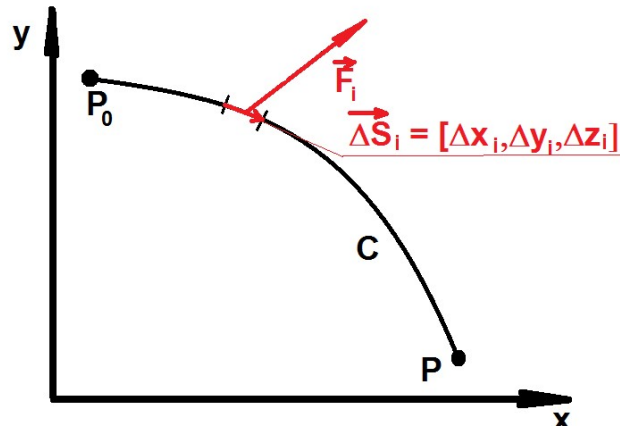
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}^2}{2} \right) = \vec{F}\vec{v}
\tag{1.27}$$

Oznaczając energię kinetyczną $\frac{m\vec{v}^2}{2} = T$ otrzymujemy:

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F}\vec{v}
\tag{1.28}$$

Całkując obydwie strony równania (1.28) dostajemy:

$$\int_{t_0}^t \frac{dT}{dt} dt = T - T_0 = \int_{t_0}^t \vec{F} \vec{v} dt \quad (1.29)$$



Rys.1.6. Ruch punktu materialnego po krzywej C pod wpływem siły $\vec{F}(t)$.

Rozważmy prawą stronę równania (1.29). Zarówno siła \vec{F} jak i prędkość są zależnymi od czasu wektorami (rys.1.6). Całka po prawej stronie równania może być przekształcona następująco:

$$\int_{t_0}^t \vec{F} \vec{v} dt = \int_{t_0}^t (F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (F_{x_i} v_{x_i} + F_{y_i} v_{y_i} + F_{z_i} v_{z_i}) \Delta t_i =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (F_{x_i} \Delta x_i + F_{y_i} \Delta y_i + F_{z_i} \Delta z_i) = \int_{P_0}^P F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int_{P_0}^P \vec{F} d\vec{s} \quad (1.30)$$

Wyrażenie $\int_{P_0}^P F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int_{P_0}^P \vec{F} d\vec{s}$ jest całką krzywoliniową I równie jest pracy siły \vec{F} wykonanej na krzywej C pomiędzy punktami P_0 i P.

1.3.2.1. Pole potencjalne i pole zachowawcze (konserwatywne)

Załóżmy że w trójwymiarowej przestrzeni istnieje funkcja skalarna $V(\vec{r}, t)$ taka, że w każdym punkcie tej przestrzeni siła działająca na ciało umieszczone w tym punkcie jest równa:

$$\vec{F} = -\text{grad}V(\vec{r}, t) \quad (1.31)$$

Funkcja $V(\vec{r}, t)$ nosi nazwę potencjału pola. Jeśli potencjał pola skalarnego jest niezależny od czasu pole takie jest polem zachowawczym. Praca wykonana przez siłę \vec{F} w polu zachowawczym wynosi:

$$W = \int_{P_0}^P \vec{F} d\vec{s} = - \int_{P_0}^P \text{grad}V d\vec{s} = - \int_{P_0}^P \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \quad (1.32)$$

WSTAWKA MATEMATYCZNA: Wyrażenie $f_1(x, y, z)dx + f_2(x, y, z)dy + f_3(x, y, z)dz$ jest różniczką zupełną jeśli istnieje taka funkcja $U(x, y, z)$ że spełnione jest następujące równanie:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= f_1 \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= f_2 \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= f_3\end{aligned}\tag{1.33}$$

Całka krzywoliniowa różniczki zupełnej ma postać:

$$\int_{P_0}^P \text{tot.diff.} = U(P) - U(P_0)\tag{1.34}$$

Biorąc pod uwagę właściwość (1.34) całki krzywoliniowej różniczki zupełnej otrzymujemy poniższe wyrażenie na pracę siły w polu zachowawczym:

$$W = \int \vec{F} d\vec{s} = -(V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0)) = V(\vec{r}_0) - V(\vec{r})\tag{1.35}$$

Mamy więc:

$$V(\vec{r}) = V(\vec{r}_0) - \int_{P_0}^P \vec{F} d\vec{s}\tag{1.36}$$

Z równania (1.36) wynika, że potencjał jest wielkością względną, tzn. aby określić potencjał pola w pewnym punkcie musimy zdefiniować potencjał w jakimś innym punkcie przyjętym jako punkt odniesienia.

Łącząc równania (1.36) i (1.26) otrzymujemy prawo zachowania energii:

$$V+T = V_0 + T_0 = \text{constant}\tag{1.37}$$

1.3.3. Zasada zachowania momentu pędu

Założmy że punkt materialny porusza się w przestrzeni trójwymiarowej (rys.1.7). Równanie ruchu ma postać:

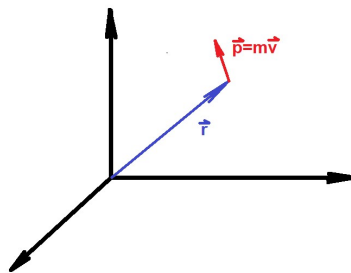
$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}\tag{1.38}$$

Mnożąc (1.38) przez wektor wodzący $\vec{r} \times$ otrzymujemy:

$$\vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}\tag{1.39}$$

Biorąc pod uwagę że $\vec{v} \times m\vec{v} = 0$ dostajemy ostatecznie:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) &= \vec{r} \times \vec{F} \\ \frac{d\vec{J}}{dt} &= \vec{D}\end{aligned}\tag{1.40}$$



Rys.1.7. Ruch punktu materialnego w przestrzeni 3D.

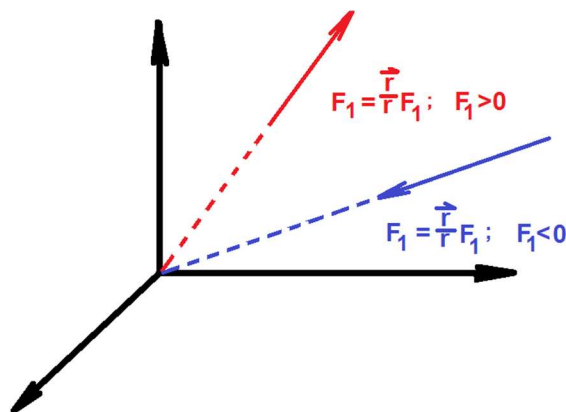
gdzie $\vec{J} = \vec{r} \times m\vec{v}$ jest momentem pędu a $\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F}$ jest momentem działającej siły względem punktu zerowego przyjętego układu współrzędnych. Z definicji wektora momentu pędu wynika że jest on prostopadły zarówno do wektora położenia \vec{r} jak i do wektora pędu $m\vec{v}$, tzn. jest wektor momentu pędu prostopadły do płaszczyzny ruchu. Jeżeli w danym ruchu moment siły D wynosi zero, wektor momentu pędu pozostaje stały, mamy więc do czynienia z ruchem płaskim.

1.4. Ruch w polu sił centralnych

Siła centralna jest zdefiniowana równaniem:

$$\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r} F \quad (1.41)$$

gdzie \vec{r} jest wektorem położenia, r jest jego długością więc $\frac{\vec{r}}{r}$ jest wektorem jednostkowym równoległym do wektora położenia (rys.1.8). Moment takiej siły centralnej względem punktu



Rys.1.8. Definicja siły centralnej

zerowego układu współrzędnych wynosi:

$$\vec{D} = \vec{r} \times \frac{\vec{r}}{r} F = 0 \quad (1.42)$$

Jak wynika z równania (1.42) ruch w polu sił centralnych jest ruchem płaskim. Pokażemy że jeśli potencjał pola sił zależy tylko od odległości od centrum pola, czyli od długości wektora położenia to takie pole jest polem sił centralnych.

Założmy że mamy do czynienia z polem zachowawczym i że $V=V(r)$. Obliczmy siłę działającą na umieszczone w takim polu ciało biorąc pod uwagę że $V(r(x,y,z))$ jest funkcją złożoną:

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= -\text{grad}V(r) = -\left(\vec{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial V}{\partial z}\right) = \\
 &= \left(\vec{i} \frac{dV}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} + \vec{j} \frac{dV}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} + \vec{k} \frac{dV}{dr} \frac{\partial r}{\partial z}\right) = \\
 &= -\frac{dV}{dr} \left(\vec{i} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \vec{j} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \vec{k} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = \\
 &= -\frac{dV}{dr} \frac{1}{r} (\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) = -\frac{dV}{dr} \frac{\vec{r}}{r}
 \end{aligned} \tag{1.43}$$

1.4.1. Wzór Bineta

Jak pokazaliśmy wyżej, ruch w polu sił centralnych jest ruchem płaskim, możliwy jest więc opis tego ruchu we współrzędnych biegunowych. Znajdziemy równanie ruchu w polu sił centralnych we współrzędnych biegunowych, tzn. równanie służące znalezieniu równania toru w postaci $r=r(\phi)$.

Moment pędu poruszającego się punktu materialnego jest dany przez¹:

$$J = |\vec{r} \times m\vec{v}| = mrv_{\perp} = mr^2\dot{\phi} \tag{1.44}$$

Równanie ruchu w polu sił centralnych ma postać:

$$m\vec{a} = F_r \frac{\vec{r}}{r} \quad / \bullet \frac{\vec{r}}{r} \tag{1.45}$$

otrzymujemy więc:

$$ma_r = F_r \tag{1.46}$$

gdzie a_r jest radialną składową przyspieszenia a F_r jest siłą centralną (zerowy punkt układu współrzędnych jest w centrum pola). Uwzględniając wyrażenie na radialną składową przyspieszenia (1.44) otrzymujemy układ równań:

$$\begin{aligned}
 m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) &= F_r \\
 J &= mr^2\dot{\phi}
 \end{aligned} \tag{1.47}$$

Aby otrzymać równanie na tor ruchu w postaci $r=r(\phi)$ musimy wyeliminować z powyższego układu równań czas. Wektor położenia może być uważany za funkcję złożoną postaci $r=r(\phi(t))$, mamy więc:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\phi} \dot{\phi} = \frac{dr}{d\phi} \frac{J}{mr^2} = -\frac{J}{m} \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\phi} \tag{1.48}$$

¹ Ponieważ mamy do czynienia z ruchem płaskim, możemy używać skalarnej wartości momentu pędu. Wektor momentu pędu jest prostopadły do stałej płaszczyzny ruchu, więc jego kierunek nie ulega zmianie.

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\phi} \frac{J}{mr^2} = -\frac{J}{m} \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\phi^2} \frac{J}{mr^2} = -\frac{J^2}{m^2 r^2} \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\phi^2} \quad (1.49)$$

$$m \left(-\frac{J^2}{m^2 r^2} \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\phi^2} - \frac{J^2}{m^2 r^3} \right) = F_r \quad (1.50)$$

i ostatecznie otrzymujemy:

$$\frac{-J^2}{mr^2} \left\{ \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\phi^2} + \frac{1}{r} \right\} = F_r \quad \text{wzór Bineta} \quad (1.51)$$

Równanie (1.51) znane jest jako wzór Bineta. Użyjmy tego wzoru do rozwiązania ruchu w polu sił centralnych w którym siła radialna ma postać $F_r = -k \frac{1}{r^2}$.

PRZYKŁAD: Siła centralna jest postaci $F_r = -k \frac{1}{r^2}$. Wzór Bineta:

$$-\frac{J^2}{mr^2} \left\{ \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\phi^2} + \frac{1}{r} \right\} = -k \frac{1}{r^2} \quad \text{mamy więc:}$$

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\phi^2} + \frac{1}{r} = \frac{km}{J^2} \quad \text{podstawmy } \frac{1}{r} = x \text{ i otrzymujemy:}$$

$$\frac{d^2x}{d\phi^2} + x = \frac{km}{J^2}$$

Rozwiązaniem jest funkcja $x = A \cos \phi + \frac{km}{J^2}$ więc ostatecznie mamy:

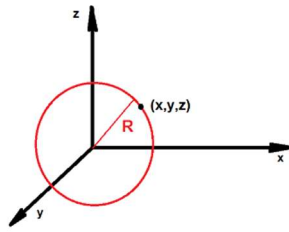
$$r = \frac{\frac{J^2}{km}}{1 + \frac{AJ^2}{km} \cos \phi}$$

Powyższe równanie jest równaniem jednej z krzywych stożkowych. Dla odpowiednio małych wartości momentu pędu jest to równanie elipsy².

1.5. Ruch nieswobodnego punktu materialnego

Przypuśćmy, że ruch punktu materialnego jest ograniczony do powierzchni kuli, której środek znajduje się w początku układu współrzędnych (Rys.1.9).

² $r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos \phi}$. Jeśli $e < 1$ otrzymujemy elipsę, jeśli $e = 1$ otrzymujemy parabolę, jeśli $e > 1$ otrzymujemy hiperbolę.



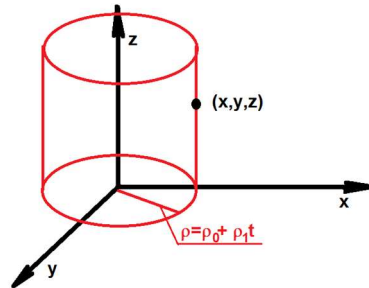
Rys.1.9. Ruch punktu materialnego ograniczony do powierzchni kuli o promieniu R .

Współrzędne tego punktu muszą przeto spełniać równanie kuli:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (1.52)$$

Równanie to przedstawia ograniczenie ruchu punktu materialnego i zwane jest równaniem więzów.

PRZYKŁAD 1: Punkt porusza się po powierzchni pionowego walca. Promień podstawy walca rośnie liniowo w czasie (Rys.1.10).

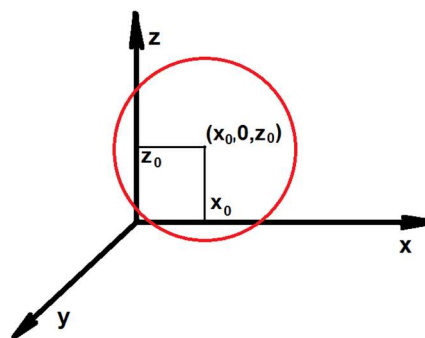


Rys.1.10. Punkt na powierzchni pionowego walca.

Współrzędne (x, y, z) punktu pozostającego na powierzchni walca spełniają równanie $x^2 + y^2 = \rho_0 + \rho_1 t$.

PRZYKŁAD 2: Punkt porusza się we wnętrzu kuli z rys.1.9. W takim przypadku równanie więzów jest nierównością: $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 < 0$ lub $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \leq 0$ w zależności od tego czy punkt porusza się tylko we wnętrzu kuli czy też także na jej powierzchni.

PRZYKŁAD 3: Punkt porusza się po okręgu w płaszczyźnie xz (Rys.1.11).



Rys.1.11. Punkt na okręgu w płaszczyźnie xz .

równania więzów
$$(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2 = 0$$

$$y = 0$$

PRZYKŁAD 4: Ruch punktu jest ograniczony do powierzchni kuli poruszającej się jednostajnie w przestrzeni:

$$(x - at)^2 + (y - bt)^2 + (z - ct)^2 - R^2 = 0$$

W ogólności punkt materialny (lub układ punktów materialnych) nie ma pełnej swobody ruchu. Najczęściej położenie punktu (układu punktów) musi spełniać pewne geometryczne ograniczenia zwane więzami. Jeśli równania (lub nierówności) więzów mogą być zapisane w postaci:

$$f(x, y, z, t) = 0 \quad \text{lub} \quad f(x, y, z, t) \leq 0 \quad \text{albo} \quad f(x, y, z, t) \geq 0 \quad (1.53)$$

Mówimy że więzy są więzami HOLONOMICZNYMI. Niekiedy równania więzów zawierają pochodne współrzędnych względem czasu, są więc postaci:

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = 0 \quad \text{or} \quad f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \leq 0 \quad \text{or} \quad f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \geq 0 \quad (1.54)$$

Ten rodzaj więzów nosi nazwę więzów nieholonomicznych.

Jeśli równania więzów nie zawierają czasu, mówimy że mamy do czynienia z więzami SKLERONOMICZNYMI, w przeciwnym przypadku więzy są REONOMICZNE. Więzy dane równaniami są więzami DWUSTRONNYMI, więzy wyrażone za pomocą nierówności są więzami JEDNOSTRONNYMI.

Więzy są więc geometrycznymi lub kinematycznymi ograniczeniami możliwości ruchu ciała (układu ciał). Mówimy wówczas że ciało (układ ciał) poddany jest działaniu więzów danych równaniami (1.53) lub nierównościami (1.54).

1.5.1. Siły reakcji więzów, praca sił więzów

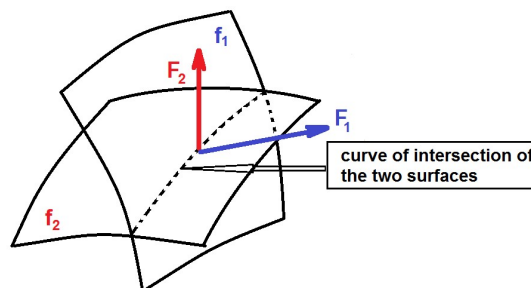
Równanie ruchu punktu materialnego poddanego działaniu więzów ma postać:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_R \quad (1.55)$$

gdzie \vec{F} jest siłą działającą na punkt a \vec{F}_R jest siłą reakcji więzów. Z doświadczenia wynika że **siły reakcji więzów są prostopadłe do powierzchni więzów** pod warunkiem że **siły tarcia są włączone do sił danych**, wyrażonych w równaniu (1.55) przez \vec{F} . Jeśli tak, to to siła reakcji więzów w przypadku ruchu po powierzchni danej równaniem $f(x,y,z)$ dana jest przez:

$$\vec{F}_R = \lambda \cdot \text{grad}(f) \quad (1.56)$$

W przypadku ruchu punktu materialnego po krzywej danej równaniami $f_1(x,y,z)=0$ oraz



Rys.1.12. Siły reakcji wynikające z oddziaływania z dwiema płaszczyznami. Siła reakcji jest kombinacją liniową dwu sił reakcji F_1 i F_2 (równanie (1.57)).

$f_2(x,y,z)=0$ (Rys.1.12) siła reakcji więzów jest dana przez:

$$\vec{F}_R = \lambda_1 \cdot \text{grad}(f_1) + \lambda_2 \cdot \text{grad}(f_2) \quad (1.57)$$

1.5.2. Praca sił reakcji więzów

W przypadku ruchu po powierzchni zdefiniowanej równaniem $f(x,y,z)=0$ praca sił reakcji więzów dana jest przez:

$$W_R = \vec{F}_R \cdot d\vec{s} = \lambda \text{grad}(f) \cdot \dot{\vec{r}} dt \quad (1.58)$$

Dla więzów skleronomicznych mamy:

$$0 = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} = \text{grad}(f) \cdot \dot{\vec{r}} \quad (1.59)$$

Ponieważ wektor $\dot{\vec{r}}$ jest prostopadły do wektora $\text{grad}(f)$, praca sił reakcji więzów w przypadku więzów skleronomicznych jest równa zero. Dla więzów reonomicznych mamy:

$$0 = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t} = \text{grad}(f) \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (1.60)$$

Ponieważ pochodna $\frac{\partial f}{\partial t}$ jest w ogólności różna od zera, praca sił reakcji różni się od zera dla przypadku więzów reonomicznych.

1.5.3. Motion at a surface – equation of motion

Załóżmy, że punkt materialny porusza się po powierzchni $F(x,y,z,t)$ pod działaniem siły \vec{F} . Równanie ruchu tego punktu ma postać:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_R = \vec{F} + \lambda \text{grad}(f) \quad (1.61)$$

$$f(x, y, z, t) = 0$$

Celem jest wyeliminować z powyższych równań $\lambda(t)$ (które może być funkcją czasu) aby otrzymać równanie ruchu w postaci:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \text{function}(f, \dot{\vec{r}}, \vec{r}) \quad (1.62)$$

Pierwsza pochodna $f(x,y,z,t)$ ma postać:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t} = \text{grad}(f) \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (1.63)$$

Druga pochodna wynosi:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} \text{grad}(f) + \dot{\vec{r}} \frac{d}{dt} (\text{grad}(f)) + \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} \quad (1.64)$$

Biorąc pod uwagę (1.64) i (1.61) otrzymujemy:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda \text{grad}(f) \quad (1.65)$$

gdzie λ jest postaci:

$$\lambda = \frac{-m \left(\dot{\vec{r}} \frac{d}{dt} \text{grad}(f) + \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \vec{F} \text{grad}(f)}{(\text{grad}(f))^2} \quad (1.66)$$

Powyższe równania są dość skomplikowane i choć można je często rozwiązać numerycznie, ich przydatność jest niewielka, istnieją bowiem znacznie bardziej poręczne metody rozwiązywania tego typu zagadnień.

1.5.4. Ruch po krzywej – równanie ruchu

W przypadku ruchu po krzywej zdefiniowanej przez przecięcie dwu płaszczyzn $f_1(x,y,z)$ i $f_2(x,y,z)$ układ równań ruchu ma postać:

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} &= \vec{F} + \lambda_1 \text{grad}(f_1) + \lambda_2 \text{grad}(f_2) \\ f_1(x, y, z, t) &= 0 \\ f_2(x, y, z, t) &= 0 \end{aligned} \quad (1.67)$$

Możliwe jest wyeliminowanie λ_1 i λ_2 z powyższego układu równań aby otrzymać równanie ruchu w postaci:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \text{function}(\dot{\vec{r}}, \vec{r}, f_1, f_2) \quad (1.68)$$

jednak otrzymane w rezultacie równania są tak złożone że ich użyteczność jest znikoma. Można jednak otrzymać wiele użytecznych informacji o ruchu bez dokładnego rozwiązania tego układu równań. Przedstawione niżej rozważania są również okazją do zapoznania się z pojęciem funkcji specjalnych i poznania jednej z takich funkcji zwanej funkcją Γ .

Pomnóżmy równania (1.67) przez wektor \vec{t} styczny do toru ruchu:

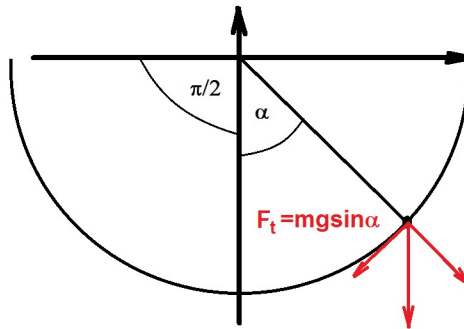
$$\begin{aligned} m\vec{a} \cdot \vec{t} &= \vec{F} \cdot \vec{t} + \vec{F}_R \cdot \vec{t} \\ m\vec{a}_t &= F_t + 0 \\ m\vec{a}_t &= F_t \end{aligned} \quad (1.69)$$

gdzie a_t styczną składową przyspieszenia, F_t jest styczną składową przyłożonej siły.

$\vec{F}_R \cdot \vec{t} = 0$ ponieważ siła reakcji więzów jest prostopadła do toru ruchu. Otrzymujemy więc:

$$m\dot{s} = F_t \quad (1.70)$$

s jest odległością przebytą przez punkt, jest to długość łuku krzywej pomiędzy początkowym i końcowym punktem ruchu. Zastosujmy równania (1.69) do rozwiązania zagadnienia wahadła matematycznego przy amplitudzie ruchu wahadła równej $\pi/2$ (rys.1.13).



Rys.1.13. Wahadło matematyczne. Amplituda ruchu wynosi $\pi/2$.

Styczną składową siły wynosi:

$$F_t = -mg \sin \alpha \quad (1.71)$$

otrzymujemy więc:

$$m\dot{s} = -mg \sin \alpha \quad (1.72)$$

Biorąc pod uwagę zależności geometryczne $s = l\alpha$ i $\dot{s} = l\dot{\alpha}$ otrzymujemy:

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{l} \sin \alpha \quad \text{mnożąc przez } l \cdot \dot{\alpha} \quad (1.73)$$

$$\ddot{\alpha} \dot{\alpha} = -\frac{g}{l} \dot{\alpha} \sin \alpha \quad (1.74)$$

Biorąc pod uwagę że $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\alpha}^2) = \dot{\alpha} \ddot{\alpha}$ i $\frac{d(\cos \alpha)}{dt} = -\sin \alpha \cdot \dot{\alpha}$ otrzymujemy:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\alpha}^2) = -\frac{g}{l} \frac{d(\cos \alpha)}{dt} \quad (1.75)$$

Całkując powyższe równanie mamy:

$$\frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 = \frac{g}{l} \cos \alpha + C \quad (1.76)$$

C jest stałą. Ponieważ $\dot{\alpha} = 0$ gdy $\alpha = 0$ stała $C = 0$, mamy więc:

$$\frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 = \frac{g}{l} \cos \alpha \quad (1.77)$$

Przekształcając powyższe równanie otrzymujemy:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \alpha} \quad (1.78)$$

Rozdzielając zmienne mamy:

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{\cos \alpha}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} dt \quad (1.79)$$

Całkując równanie (1.79) dla kątów od 0 do $\pi/2$ dostajemy:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos \alpha}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \int_0^{T/4} dt = \sqrt{\frac{2g}{l}} \frac{T}{4} \quad (1.80)$$

Całka po lewej stronie tego równania nie może być wyrażona przez żadną funkcję algebraiczną, trygonometryczną itp. Dla obliczenia tej całki zdefiniujemy funkcję Γ .

1.5.4.1. Funkcje Γ i β

Definicja funkcji Γ ma postać:

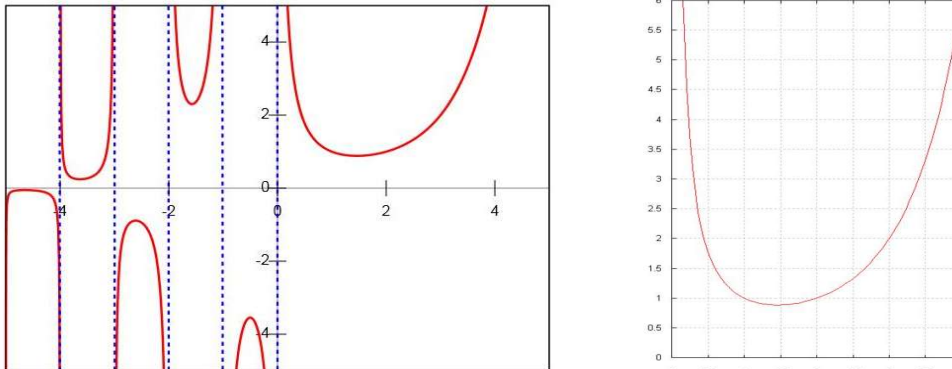
$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \quad (1.81)$$

Udowodnimy następującą zależność rekurencyjną:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \quad (1.82)$$

Korzystając z definicji (1.81) otrzymujemy $\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} x^p e^{-x} dx$. Obliczając tę całkę przez części otrzymujemy:

$$\Gamma(p+1) = -x^p e^{-x} \Big|_0^\infty - p \int_0^\infty x^{p-1} (-e^{-x}) dx = p \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx = p\Gamma(p) \quad (1.83)$$



Rys.1.14. Funkcja Γ w przedziałach $(-5,5)$ i $(0,4)^3$.

For $p=1$ $\Gamma(1) = \int_0^{\pi/2} e^{-x} dx = 1$, for $p=2$ $\Gamma(2)=1 \cdot \Gamma(1)=1$, for $p=3$ $\Gamma(3)=2 \cdot 1=2$, and in general:

$$\Gamma(n+1)=n! \quad (1.84)$$

Kształt funkcji Γ w przedziale wartości p $(-5,5)$ jest pokazany na Rys.1.14.

Definicja funkcji Beta ma postać:

$$\beta(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2p-1} (\cos \theta)^{2q-1} d\theta \quad (1.85)$$

Związek pomiędzy funkcjami Γ i β ma postać:

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (1.86)$$

Dla $p=1/2$ i $q=1/4$ funkcja β ma postać:

$$\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \int_0^{\pi/2} (\cos \alpha)^{-\frac{1}{2}} d\alpha = \frac{T}{4} \sqrt{\frac{2g}{l}} \quad (1.87)$$

otrzymujemy więc:

$$\frac{T}{4} \sqrt{\frac{2g}{l}} = \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \quad (1.88)$$

Biorąc pod uwagę że:

³ Wikipedia

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1.7724538509 \quad \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = 3.6256099082 \quad \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = 1.2254167024$$

otrzymujemy związek:

$$T \cong 7.4163 \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1.89)$$

Jak widać okres ruchu wahadła przy amplitudzie ruchu równej $\pi/2$ istotnie różni się od okresu dla małych wychyleń wynoszącego $T \cong 6,28 \sqrt{\frac{l}{g}}$.

1.6. Zasada D'Alemberta

Zasada d'Alemberta jest inną, równoważną formą równań ruchu. Skorzystamy z tej zasady przy wyprowadzaniu równań Lagrangea. Rozważymy trzy przypadki ruchu punktu materialnego.

1.6.1. Swobodny punkt materialny

Zasada d'Alemberta dla swobodnego punktu materialnego ma postać:

$$(\vec{F} - m\ddot{\vec{r}})\delta\vec{r} = 0 \quad (1.90)$$

gdzie $\delta\vec{r}$ jest dowolnym wektorem. Pokażemy że taka postać zasady d'Alemberta jest równoważna II zasadzie dynamiki Newtona.

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \quad (1.91)$$

I: Jeśli $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$ to $\vec{F} - m\ddot{\vec{r}} = 0$, więc mnożąc przez dowolny wektor $\delta\vec{r}$ otrzymujemy $(\vec{F} - m\ddot{\vec{r}})\delta\vec{r} = 0$.

II: Jeśli $(\vec{F} - m\ddot{\vec{r}})\delta\vec{r} = 0$ dla dowolnego wektora $\delta\vec{r}$, to może to być prawdą tylko jeśli $\vec{F} - m\ddot{\vec{r}} = 0$ co prowadzi do II zasady dynamiki Newtona.

1.6.2. Ruch punktu materialnego na powierzchni

Równanie ruchu Newtona ma w takim przypadku postać:

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} &= \vec{F} + \lambda \text{grad}(f) \\ f(\vec{r}, t) &= 0 \end{aligned} \quad (1.92)$$

Pokażemy że powyższe równania są równoważne zasadzie d'Alemberta, która w przypadku ruchu punktu materialnego po powierzchni ma postać:

$$\begin{aligned} (\vec{F} - m\ddot{\vec{r}})\delta\vec{r} &= 0 \\ f(\vec{r}, t) &= 0 \\ \text{grad}(f) \cdot \delta\vec{r} &= 0 \end{aligned} \quad (1.93)$$

W tym przypadku wektor $\delta\vec{r}$ nie jest dowolny lecz spełnia dodatkowy warunek $\text{grad}(f) \cdot \delta\vec{r} = 0$.

I: Jeśli przemnożymy równanie $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda \text{grad}(f)$ przez wektor $\delta\vec{r}$ spełniający warunek $\text{grad}(f) \cdot \delta\vec{r} = 0$ otrzymujemy natychmiast równanie (1.93).

II: Pomnóżmy trzecie równanie układu (1.93) przez (na razie) dowolny współczynnik λ i dodajmy wynik do równanie pierwszego (1.93). Otrzymujemy:

$$\left(\vec{F} + \lambda \text{grad}(f) - m\ddot{\vec{r}}\right) \delta\vec{r} = 0 \quad (1.94)$$

Przeanalizujemy nałożony na wektor $\delta\vec{r}$ warunek $\text{grad}(f) \cdot \delta\vec{r} = 0$ który można zapisać w postaci:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0 \quad (1.95)$$

Wektor $\text{grad}(f)$ nie może być równy zeru co oznacza że przynajmniej jedna z jego składowych jest różna od zera. Załóżmy że $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$. X-owa składowa $\delta\vec{r}$ jest więc równa:

$$\delta x = \frac{-\left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z\right)}{\frac{\partial f}{\partial x}} \quad (1.96)$$

Z równania (1.96) wynika że składowe δy i δz pozostają dowolne i niezależne, lecz składowa δx jest wyznaczona wartościami dwu pozostałych składowych $\delta\vec{r}$. Zapiszmy równanie (1.94) w postaci:

$$\left(X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} - m\ddot{x}\right) \delta x + \left(Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} - m\ddot{y}\right) \delta y + \left(Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} - m\ddot{z}\right) \delta z = 0 \quad (1.97)$$

X, Y i Z są składowymi siły \vec{F} . O współczynniku λ zakładaliśmy do tej chwili że może przyjmować dowolną wartość. Ustalamy teraz taką wartość współczynnika λ że spełnione jest równanie:

$$X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} - m\ddot{x} = 0 \quad (1.98)$$

Oznacza to że λ przyjmuje wartość $\lambda = \frac{m\ddot{x} - X}{\frac{\partial f}{\partial x}}$. Jest to możliwe ponieważ założyliśmy że

$\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$. Równanie (1.97) jest więc zredukowane do postaci:

$$\left(Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} - m\ddot{y}\right) \delta y + \left(Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} - m\ddot{z}\right) \delta z = 0 \quad (1.99)$$

Powyższe równanie musi być spełnione dla dowolnych wartości δy i δz . Jest to możliwe tylko wtedy gdy:

$$Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} - m\ddot{y} = 0 \quad (1.100)$$

oraz

$$Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} - m\ddot{z} = 0 \quad (1.101)$$

Równania (1.98), (1.100) oraz (1.101) są równoważne równaniu (1.92).

1.6.3. Ruch punktu materialnego wzdłuż krzywej

Równania ruchu punktu poruszającego się wzdłuż krzywej mają postać:

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} &= \vec{F} + \lambda_1 \text{grad}(f_1) + \lambda_2 \text{grad}(f_2) \\ f_1(\vec{r}, t) &= 0 \\ f_2(\vec{r}, t) &= 0 \end{aligned} \quad (1.102)$$

$f_1(\vec{r}, t) = 0$ and $f_2(\vec{r}, t) = 0$ są równaniami dwu powierzchni przecinających się wzdłuż zdefiniowanej w ten sposób krzywej. Obydwie te funkcje muszą być od siebie niezależne aby nie wyznaczały dwu płaszczyzn równoległych. Udowodnimy że równania (1.102) są równoważne zasadzie d'Alemberta zapisanej w postaci:

$$\begin{aligned} (\vec{F} - m\ddot{\vec{r}}) \cdot \delta\vec{r} &= 0 \\ f_1(\vec{r}, t) &= 0 \\ f_2(\vec{r}, t) &= 0 \\ \text{grad}(f_1) \cdot \delta\vec{r} &= 0 \\ \text{grad}(f_2) \cdot \delta\vec{r} &= 0 \end{aligned} \quad (1.103)$$

I: Jeśli przemnożymy pierwsze równanie (1.102) przez wektor $\delta\vec{r}$ spełniający warunki $\text{grad}(f_1) \cdot \delta\vec{r} = 0$ and $\text{grad}(f_2) \cdot \delta\vec{r} = 0$ otrzymamy pierwsze z równań (1.103).

II: Przemnożmy ostatnie dwa z równań (1.103) przez (na razie) dowolne współczynniki λ_1 i λ_2 i dodajmy je do pierwszego z równań (1.103). Otrzymujemy:

$$(\vec{F} + \lambda_1 \text{grad}(f_1) + \lambda_2 \text{grad}(f_2) - m\ddot{\vec{r}}) \cdot \delta\vec{r} = 0 \quad (1.104)$$

Równanie 1.104) można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \left(X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} - m\ddot{x} \right) \delta x + \left(Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} - m\ddot{y} \right) \delta y + \\ + \left(Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} - m\ddot{z} \right) \delta z = 0 \end{aligned} \quad (1.105)$$

WSTAWKA MATEMATYCZNA:

Funkcje zależne i niezależne

Rozważmy zbiór m funkcji n zmiennych $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)$. Załóżmy że wartości jednej z tych funkcji $f_j(x_1, \dots, x_n)$ są jednoznacznie wyznaczone przez inne funkcje:

$$f_j(x_1, \dots, x_n) = \phi(f_1, \dots, f_{j-1}, f_{j+1}, \dots, f_m)$$

Funkcja f_j jest zależna od pozostałych funkcji zbioru. Jeśli żadna z funkcji zbioru nie jest zależna od pozostałych funkcji to taki zbiór funkcji jest zbiorem funkcji niezależnych.

EXAMPLE: Dla trzech funkcji:

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 - x_3$$

$$f_2(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_3 + x_2$$

$$f_3(x_1, \dots, x_n) = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + x_3^2) - (x_1^2 - 1)x_2 x_3 - x_1(x_2^2 - x_3^2)^2$$

Spełniona jest tożsamość:

$$f_3 = f_1^2 - f_1 f_2 + f_2^2$$

Układ funkcji niezależnych

Założmy że istnieje układ m funkcji n zmiennych $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)$ i że $n > m$.
Jeśli istnieje różny od zera wyznacznik macierzy Jacobiego tego układu:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (1.106)$$

to układ tych funkcji jest układem funkcji niezależnych⁴. Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne. Zauważmy że aby dwie funkcje $f_1(x,y,z)$ i $f_2(x,y,z)$ mogły definiować krzywą muszą być układem funkcji niezależnych.

Ostatnie dwa równania układu (1.103) są warunkami które ograniczają wartości wektora $\delta \vec{r}$.
Zapiszmy je w postaci:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_1}{\partial z} \delta z &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_2}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_2}{\partial z} \delta z &= 0 \end{aligned} \quad (1.107)$$

Macierz współczynników tego układu równań ma postać:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1.108)$$

Funkcje f_1 i f_2 są niezależne. Można więc z macierzy (1.108) wyjąć macierz kwadratową o wyznaczniku różnym od zera. Założmy że ten niezerowy wyznacznik zawiera dwie pierwsze kolumny (1.108):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1.109)$$

Oznacza to że następujący układ równań można rozwiązać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y} \delta y &= -\frac{\partial f_1}{\partial z} \delta z \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_2}{\partial y} \delta y &= -\frac{\partial f_2}{\partial z} \delta z \end{aligned} \quad (1.110)$$

Oznacza to że zarówno składowa δx jak i składowa δy są funkcjami δz :

⁴ Warunkiem koniecznym i wystarczającym do tego aby m funkcji n zmiennych $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)$ było funkcjami niezależnymi jest aby istniał w macierzy Jacobiego wyznacznik stopnia m różny od zera..

$\delta x = \text{funkcja}(\delta z)$

$\delta y = \text{funkcja}(\delta z)$

tzn. zarówno δx jak i δy są zależne od δz . δz pozostaje jedyną niezależną składową wektora $\delta \vec{r}$.

Wybermy takie wartości λ_1 i λ_2 w dwu pierwszych równaniach (1.105) aby spełnione były następujące dwa warunki:

$$\begin{aligned}\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} &= m\ddot{x} - X \\ \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} &= m\ddot{y} - Y\end{aligned}\tag{1.111}$$

Wybór takich wartości λ_1 i λ_2 jest możliwy ponieważ wyznacznik układu równań (1.111) jest wyznacznikiem macierzy transponowanej (1.109) który jest różny od zera. Tak więc z równań (1.105) pozostaje:

$$\left(Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} - m\ddot{z} \right) \delta z = 0\tag{1.112}$$

i równanie to musi być spełnione dla dowolnych wartości δz . Jest to możliwe tylko wtedy gdy wyrażenie w nawiasie jest równe zero, mamy więc:

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ m\ddot{y} &= Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ m\ddot{z} &= Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}\end{aligned}\tag{1.113}$$

Powyższy układ równań jest równoważny równaniu (1.102).

1.7. Przesunięcie rzeczywiste, możliwe i przygotowane

Przesunięcie rzeczywiste wynika z rozwiązania równań ruchu i dane jest przez:

$$d\vec{r} = \dot{\vec{r}} dt\tag{1.112}$$

Przesunięcie możliwe jest przesunięciem dopuszczalnym z punktu widzenia równań więzów.

Dla więzów reonomicznych przesunięcie możliwe $\Delta \vec{r}$ jest wyznaczone przez warunek:

$$\Delta f = 0 = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t = \text{grad}(f) \cdot \Delta \vec{r} + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t\tag{1.113}$$

Natomiast dla więzów skleronomicznych przesunięcie możliwe spełnia warunek:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z = \text{grad}(f) \cdot \Delta \vec{r}\tag{1.114}$$

Przesunięcie rzeczywiste jest jednym z przesunięć możliwych.

Dla naszych przyszłych rozważań ważnym pojęciem jest przesunięcie przygotowane $\delta \vec{r}$ zdefiniowane przez:

$$\text{grad}(f) \cdot \delta \vec{r} = 0\tag{1.115}$$

Zgodnie z powyższą definicją przesunięcie przygotowane jest prostopadłe do wektora grad F , tzn. jest styczne do powierzchni więzów skleronomicznych, zaś w przypadku więzów reonomicznych przesunięcie przygotowane jest styczne do na chwilę zatrzymanej powierzchni więzów.

1.8. Układ nieswobodnych punktów materialnych, przesunięcie przygotowane układu

Rozważmy ograniczenia ruchu dwu punktów materialnych połączonych sztywnym prętem. Jeśli długość pręta jest równa l to równanie więzów ma postać:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0 \quad (1.116)$$

Gdyby te dwa punkty były połączone nicią, mielibyśmy do czynienia z więzami jednostronnymi i równanie więzów byłoby postaci:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 \leq 0 \quad (1.117)$$

PRZYKŁAD 1: Dwa punkty materialne są połączone sztywnym prętem i poruszają się w płaszczyźnie xy po okręgu. Długość pręta wynosi l , promień okręgu jest równy R , środek okręgu znajduje się w początku układu współrzędnych.

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - R^2 = 0$$

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - R^2 = 0$$

$$z_1 = 0$$

$$z_2 = 0$$

PRZYKŁAD 2: Dwa punkty materialne są połączone sztywnym prętem. Punkt O tego pręta dzieli go na dwie części w proporcji 2:1 i jest przymocowany do punktu zerowego kartezjańskiego układu współrzędnych. Pręt może swobodnie obracać się wokół punktu O .

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \left(\frac{l}{3}\right)^2 = 0$$

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - \left(\frac{2l}{3}\right)^2 = 0$$

W ogólności równania więzów dwustronnych układu punktów materialnych mają postać:

$$f_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t) = 0 \quad (1.118)$$

natomiast w przypadku więzów jednostronnych są nierównościami:

$$\phi_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t) \leq 0 \quad (1.119)$$

$k=1, \dots, p$ is a number of equations (or inequalities).

1.9. Liczba stopni swobody

Aby określić położenie swobodnego punktu materialnego w przestrzeni trójwymiarowej należy podać wartości trzech niezależnych współrzędnych tego punktu. Jeśli ruch tego punktu jest ograniczony jednym równaniem więzów (np. równaniem $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$) wtedy

jedna ze współrzędnych może być obliczona jeśli dwie pozostałe są znane, więc liczba współrzędnych niezbędnych do określenia położenia punktu w przestrzeni zmniejszyła się o jeden.

Dla dwu swobodnych punktów materialnych liczba współrzędnych niezbędna do ustalenia położenia takiego układu w przestrzeni wynosi 6. W ogólności, liczba współrzędnych potrzebnych do określenia położenia układu n punktów materialnych w przestrzeni wynosi $3n$. Każde równanie więzów zmniejsza tę liczbę o jeden, tak więc liczba stopni swobody układu punktów wynosi:

$$f = 3n - p \quad (1.120)$$

gdzie p jest liczbą równań więzów.

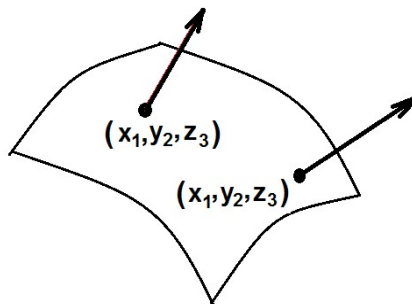
1.10. Przesunięcie przygotowane układu punktów materialnych

Dla dwu punktów materialnych poruszających się po powierzchni określonej równaniem $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = 0$ ich przesunięcie przygotowane $\delta\vec{r}_1$ i $\delta\vec{r}_2$ jest zdefiniowane równaniem (patrz Rys.1.15):

$$\text{grad}_1(f)\delta\vec{r}_1 + \text{grad}_2(f)\delta\vec{r}_2 = 0 \quad (1.121)$$

gdzie grad_i jest dany równaniem:

$$\text{grad}_i = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y_i} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z_i} \quad (1.121a)$$



Rys. 1.15. Gradienty w dwu różnych punktach są prostopadłe do powierzchni $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = 0$. Przesunięcie przygotowane $\delta\vec{r}_1$ i $\delta\vec{r}_2$ musi być prostopadłe do tych gradientów, tzn. jest styczne do powierzchni.

Dla ruchu wzdłuż krzywej zdefiniowanej przecięciem powierzchni $f_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = 0$ i $f_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = 0$ przesunięcie przygotowane jest zdefiniowane przez:

$$\begin{aligned} \text{grad}_1(f_1)\delta\vec{r}_1 + \text{grad}_2(f_1)\delta\vec{r}_2 &= 0 \\ \text{grad}_1(f_2)\delta\vec{r}_1 + \text{grad}_2(f_2)\delta\vec{r}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.122)$$

Z powyższych równań wynika że dwie składowe przesunięcia przygotowanego $\delta\vec{r}_1$ and $\delta\vec{r}_2$ są prostopadłe do obydwu powierzchni w miejscach położenia punktów materialnych.

Dla n punktów materialnych poddanych działaniu p więzów danych równaniami $f_k(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0$, gdzie $k=1, \dots, p$, przesunięcie przygotowane układu jest zdefiniowane układem p równań:

$$\sum_{i=1}^n \text{grad}_i(f_k) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad \text{for } k=1, \dots, p \quad (1.123)$$

1.11. Przestrzeń konfiguracyjna

Załóżmy, że mamy układ n punktów materialnych których położenie w przestrzeni określa n wektorów $\vec{r}_i = [x_i, y_i, z_i]$, $i=1, \dots, n$. Wprowadzamy pojęcie $3n$ -wymiarowej przestrzeni i ustalamy następujące związki pomiędzy współrzędnymi $[x_i, y_i, z_i]$ i współrzędnymi w tej $3n$ -wymiarowej przestrzeni:

$$\begin{aligned} x_1 &\Rightarrow x_1 \\ y_1 &\Rightarrow x_2 \\ z_1 &\Rightarrow x_3 \\ x_2 &\Rightarrow x_4 \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &\Rightarrow x_{3n-2} \\ y_n &\Rightarrow x_{3n-1} \\ z_n &\Rightarrow x_{3n} \end{aligned} \tag{1.124}$$

Które mogą być zapisane w ogólnej postaci:

$$x_i, y_i, z_i \Rightarrow x_{3i-2}, x_{3i-1}, x_{3i} \tag{1.125}$$

Punkt takiej $3n$ -wymiarowej przestrzeni $x=[x_1, x_2, \dots, x_{3n}]$ określa sobą położenie całego układu punktów materialnych. Podobnie jak dla współrzędnych spełnione są następujące związki pomiędzy składowymi sił działających na punkty materialne układu:

$$X_i, Y_i, Z_i \Rightarrow X_{3i-2}, X_{3i-1}, X_{3i} \tag{1.126}$$

Tak zdefiniowana przestrzeń $3n$ -wymiarowa nosi nazwę przestrzeni konfiguracyjnej. Aby uprościć zapis równań ruchu w przestrzeni konfiguracyjnej ustalamy następującą odpowiedniość pomiędzy masą i -tego punktu materialnego i masami odpowiadającymi kolejnym współrzędnym konfiguracyjnym:

$$m_i \Rightarrow m_{3i-2} = m_{3i-1} = m_{3i} \tag{1.127}$$

Stosując pojęcie przestrzeni konfiguracyjnej i wprowadzonych oznaczeń możemy w podany w tabeli zapisać równania ruchu i przesunięcie przygotowane.

	Przestrzeń 3-wymiarowa	3n-wymiarowa przestrzeń konfiguracyjna
Położenie punktów układu	$\vec{r}_i = [x_i, y_i, z_i]$ $i = 1, \dots, n$	$x=[x_1, x_2, \dots, x_{3n}]$; x przedstawia sobą wszystkie składowe wektora położenia
Równania ruchu	$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i$ $i = 1, \dots, n$	$m_j \ddot{x}_j = X_j$ $j = 1, \dots, 3n$
Więzy	$f_k(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0$ $k = 1, \dots, p$ $f=3n-p$	$f_f(x, t) = 0$ $k = 1, \dots, p$ $f=3n-p$
Przesunięcie przygotowane swobodnego układu punktów materialnych.	$\delta\vec{r}_i = [\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i]$ $i = 1, \dots, n$ $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ są dowolne	$\delta x=[\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_{3n}]$ wartości δx_j są dowolne, $j=1, \dots, 3n$
Przesunięcie przygotowane nieswobodnego układu punktów materialnych	$\sum_{i=1}^n \text{grad}_i(f_k) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$ $i=1, \dots, n$	$\sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta x_j = 0$ $k=1, \dots, p$

1.12. Prawa ruchu dla układów nieswobodnych

Dla nieswobodnego punktu materialnego równanie ruchu uwzględniające istnienie więzów można zapisać w postaci:

1. $WIEZY \Rightarrow SIŁY REAKCJI \quad \vec{F}_R$
2. $m\vec{\ddot{r}} = \vec{F} + \vec{F}_R$ siła reakcji więzów $\vec{F}_R = \lambda grad(f)$
3. Definicja przesunięcia przygotowanego $grad(f) \cdot \delta\vec{r} = 0$ prowadzi do wniosku że praca siły reakcji więzów na przesunięciu przygotowanym jest równa zero $W = \vec{F}_R \cdot \delta\vec{r} = 0$.

Dla układu nieswobodnych punktów materialnych ograniczonych pewną liczbą równań więzów równania ruchu układu mają postać:

1. $WIEZY \Rightarrow SIŁY REAKCJI \quad \vec{F}_{R_j}$ lub w przestrzeni konfiguracyjnej X_{R_j}
2. $m_i\vec{\ddot{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_{R_i}$ lub w przestrzeni konfiguracyjnej $m_j\ddot{x}_j = X_j + X_{R_j}$
3. Całkowita praca sił reakcji więzów na przesunięciu przygotowanym układu jest równa zero:

$$\sum_1^n \vec{F}_{R_i} \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{3n} X_{R_j} \delta x_j = 0 \quad (1.128)$$

Pierwsze dwa punkty są oczywiste, drugi jest zapisem równań Newtona. Punkt trzeci nie wynika z równań Newtona i nie może być z tych równań wyprowadzony.

1.13. Zasada d'Alemberta dla układu nieswobodnych punktów materialnych

Równania ruchu dla układu nieswobodnych punktów materialnych mają postać:

$$\begin{aligned} m_j\ddot{x}_j &= X_j + X_{R_j} \\ f_k(x, t) &= 0 \quad \text{dla } k=1, \dots, p \\ \sum_{j=1}^{3n} X_{R_j} \delta x_j &= 0 \end{aligned} \quad (1.129)$$

Pomnożmy pierwsze równanie przez odpowiednie składowe przesunięcia przygotowanego

$\sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta x_j = 0$ i zsumujmy tak otrzymane iloczyny po wszystkich indeksach j.

$$\sum_{j=1}^{3n} m_j\ddot{x}_j \delta x_j = \sum_{j=1}^{3n} X_j \delta x_j + \sum_{j=1}^{3n} X_{R_j} \delta x_j \quad (1.130)$$

Ostatni składnik tego równania jest równy zero (praca na przesunięciach przygotowanych), więc otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{3n} (X_j - m_j\ddot{x}_j) \delta x_j &= 0 \\ f_k(x, t) &= 0 \quad k=1, \dots, p \\ \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta x_j &= 0 \end{aligned} \quad (1.131)$$

Powyższy układ równań jest **zasadą d'Alemberta** dla układu punktów materialnych. Zasada d'Alemberta stanowi że suma prac sił przyłożonych i sił bezwładności na przesunięciach przygotowanych jest równa zero.

Zasada d'Alemberta będzie punktem wyjścia przy wyprowadzaniu równań Lagrangea pierwszego i drugiego rodzaju.

1.14. Zasada prac przygotowanych

Założmy że układ punktów materialnych jest w równowadze. W takim przypadku $\dot{x}_j = \ddot{x}_j = 0$ dla wszystkich współrzędnych przestrzeni konfiguracyjnej. W konsekwencji zasada d'Alemberta przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{3n} X_j \delta x_j &= 0 \\ f_k(x, t) &= 0 \quad \text{for } k=1, \dots, p \\ \sum \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta x_j &= 0 \end{aligned} \quad (1.132)$$

Wynika z powyższego układu równań że gdy układ jest w stanie równowagi suma prac sił przyłożonych na przesunięciach przygotowanych jest równa zero.

Prawdziwe jest twierdzenie:

Warunkiem koniecznym i dostatecznym równowagi układu punktów materialnych poddanych działaniu więzów skleronomicznych jest aby całkowita praca przyłożonych sił na przesunięciach przygotowanych zgodnych z więzami była równa zero.

1. LAGRANGE EQUATIONS

....

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \delta x_p = -\frac{\partial f_1}{\partial x_{p+1}} \delta x_{p+1} - \dots - \frac{\partial f_1}{\partial x_{3n}} \delta x_{3n}$$

(1.136a)

$$\frac{\partial f_p}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_p}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_p}{\partial x_p} \delta x_p = -\frac{\partial f_p}{\partial x_{p+1}} \delta x_{p+1} - \dots - \frac{\partial f_p}{\partial x_{3n}} \delta x_{3n}$$

Jak widać pierwszych p składowych przesunięcia przygotowanego układu δx może być obliczonych jeśli pozostałe $3n-p$ składowych jest znana, tak więc pierwszych p składowych przesunięcia przygotowanego nie są już niezależne. Równania (1.135) można zapisać w postaci:

$$\sum_{j=1}^p \left(X_j + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j} - m_j \ddot{x}_j \right) \delta x_j + \sum_{j=p+1}^{3n} \left(X_j + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j} - m_j \ddot{x}_j \right) \delta x_j = 0 \quad (1.137)$$

Ponieważ pierwsze p składników tego równania zawiera zależne składowe przesunięcia przygotowanego δx_k , spróbujemy wyzerować pierwszą część równania (1.137) poprzez wybór takich wartości współczynników λ_k (do tej chwili dowolnych) dla których spełnione jest równanie przy $j=1, \dots, p$.

$$X_j + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j} - m_j \ddot{x}_j = 0 \quad (1.138)$$

Innymi słowy pytamy czy następujący układ równań dla nieznanych $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ może być rozwiązany:

$$\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x_1} = m_1 \ddot{x}_1 - X_1$$

(1.139)

$$\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_p} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_p} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x_p} = m_p \ddot{x}_p - X_p$$

Otóż ten układ równań może być rozwiązany ponieważ macierz współczynników tego układu:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_p} & \frac{\partial f_2}{\partial x_p} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p} \end{pmatrix} \quad (1.140)$$

jest macierzą transponowaną układu (1.136a). W rezultacie z równań (1.135) pozostaje:

$$\sum_{j=p+1}^{3n} \left(X_j + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j} - m_j \ddot{x}_j \right) \delta x_j = 0 \quad (1.141)$$

Powyższy układ równań musi być spełniony przy dowolnych δx_j przy $j=p+1, \dots, 3n$. To jest możliwe tylko wtedy gdy sumy w nawiasach są równe zero, więc mamy:

$$m_j \ddot{x}_j = X_j + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \quad \text{dla } j=1, \dots, 3n \text{ i } k=1, \dots, p \quad (1.142)$$

$f_k(x, t) = 0$

Powyższy układ $3n+p$ równań zawiera $3n+p$ nieznanymi funkcjami ($3n$ współrzędnych i p mnożników δ_k) jest układem równań Lagrangea I rodzaju. Wyrażenie $\sum_{j=1}^{3n} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j}$ przedstawia sobą siły reakcji więzów.

EXAMPLE (wprawka z angielskiego): Let us find the motion of a point-like particle on side-surface of a vertical cylinder. The radius of the cylinder base changes as $\rho = \rho_0 + \rho_1 t$.

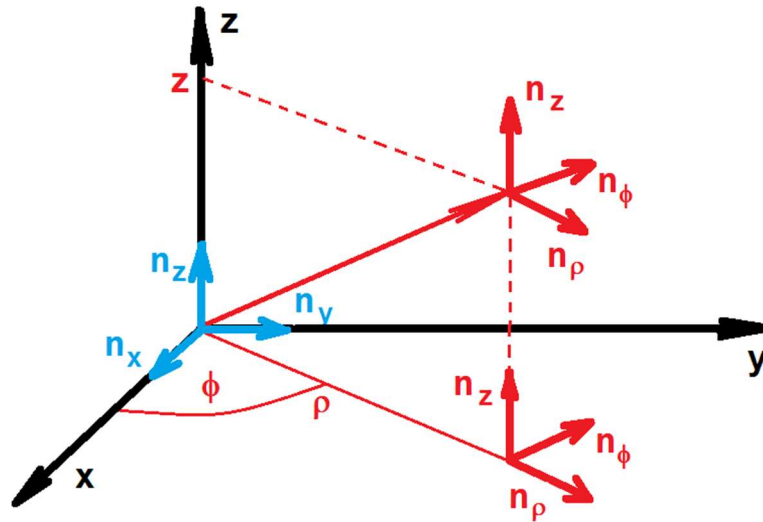


Fig.2.1. Cylindrical coordinates describe position of a point with the radius ρ , the angle ϕ and the coordinate z . The position of a point in the cylindrical coordinates is given by

$$\vec{r} = \rho \vec{n}_\rho + z \vec{n}_z.$$

The relation between the versors of Cartesian coordinates and cylindrical coordinates are given by:

$$\vec{n}_\rho = \vec{n}_x \cos \varphi + \vec{n}_y \sin \varphi$$

$$\vec{n}_\phi = -\vec{n}_x \sin \varphi + \vec{n}_y \cos \varphi$$

$$\vec{n}_z = \vec{n}_z$$

The versors \vec{n}_ρ and \vec{n}_ϕ change their direction in time, the versor \vec{n}_z is constant. The velocity of a point-like particle in the cylindrical coordinates is given by:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \vec{n}_\rho + \rho \dot{\vec{n}}_\rho + \dot{z} \vec{n}_z$$

Taking into account that $\dot{\vec{n}}_\rho = \dot{\varphi} \vec{n}_\phi$ we get:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \vec{n}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{n}_\phi + \dot{z} \vec{n}_z$$

so the cylindrical components of velocity are:

$$v_\rho = \dot{\rho}$$

$$v_\phi = \rho \dot{\varphi}$$

$$v_z = \dot{z}$$

In the same way we can calculate the cylindrical coordinates of acceleration:

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2$$

$$a_\phi = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\phi})$$

$$a_z = \dot{z}$$

Lagrange equations are as follows:

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = 0 + \lambda$$

$$m \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\phi}) = 0$$

$$m\ddot{z} = -mg$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 t$$

and finally we get:

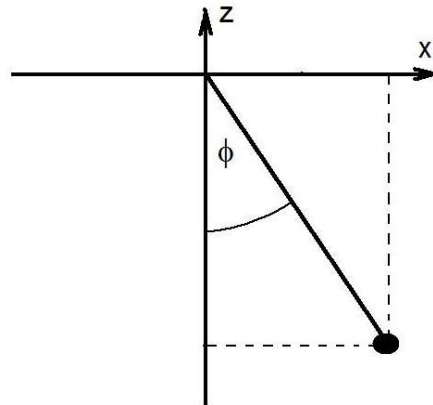
$$\phi = \int \frac{const}{(\rho_0 + \rho_1 t)} dt$$

$$z = -\frac{gt^2}{2} + \dot{z}_0 t + z_0$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 t$$

2.2. Równania Lagrangea II rodzaju

Rozważmy jako przykład płaskie wahadło matematyczne (Rys.2.2).



Rys.2.2. Wahadło matematyczne. Położenie wahadła może być określone zarówno przez współrzędne kartezjańskie x, z jak i przez kąt ϕ .

Równania więzów dla przypadku płaskiego wahadła matematycznego mają postać:

$$x^2 + z^2 - l^2 = 0 \tag{2.11}$$

$$y = 0$$

Liczba stopni swobody wahadła wynosi $f=3-2=1$. Położenie tego układu może być określone zarówno przez współrzędne kartezjańskie x, z jak też przez kąt ϕ . Związek pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi oraz kątem ϕ ma postać:

$$\begin{aligned} x &= l \sin \phi \\ z &= -l \cos \phi \end{aligned} \quad (2.12)$$

Zauważmy że jeśli podstawimy (2.12) do (2.11) to otrzymamy tożsamość:

$$l^2 \sin^2 \phi + l^2 \cos^2 \phi \equiv l^2$$

Powyższy prosty przykład uogólnimy dla układu n punktów materialnych. Niech układ punktów materialnych będzie poddany działaniu więzów danych równaniami $f_k(x,t)$, $k=1, \dots, p$. Liczba stopni swobody tego układu wynosi $f=3n-p$. Założmy że istnieje f parametrów $q=[q_1, \dots, q_{3n-p}]$ które jednoznacznie określają położenie układu w przestrzeni. Jeśli tak, muszą być spełnione równania:

$$x_j = x_j(q, t) \quad \text{dla } j=1, \dots, 3n \quad (2.13)$$

Jeśli związki (2.13) podstawimy do równań więzów I otrzymamy w wyniku następujące tożsamości:

$$f_k(x(g, t), t) \equiv 0 \quad k=1, \dots, p \quad (2.14)$$

To parametry $q=[q_1, \dots, q_f]$ nazywamy **współrzędnymi uogólnionymi** tego układu punktów materialnych. W konsekwencji tożsamości (2.14) spełnione są związki:

$$\frac{\partial f_k}{\partial q_l} = 0 \quad \text{dla } k=1, \dots, p \text{ i } l=1, \dots, 3n-p \quad (2.15)$$

Udowodnimy dwie tożsamości, przydatne w naszych dalszych rozważaniach:

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_l} = \frac{d}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \quad (2.17)$$

Ponieważ każda współrzędna konfiguracyjna jest w ogólności funkcją wszystkich współrzędnych uogólnionych I czasu mamy:

$$\dot{x}_j = \sum_{s=1}^f \frac{\partial x_j}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial x_j}{\partial t} \quad (2.18)$$

Różniczkując (2.18) względem \dot{q}_l dla ustalonego l otrzymujemy:

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \quad (2.19)$$

Tym samym udowodniliśmy równość (2.16). Pochodna $\frac{d}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial q_l}$ jest równa:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} = \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_j}{\partial t \partial q_l} \quad (2.20)$$

Różniczkując (2.18) względem pewnej wartości q_l otrzymujemy:

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_l} = \sum \left(\frac{\partial^2 x_j}{\partial q_l \partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial x_j}{\partial q_s} \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial q_l} \right) + \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_l \partial t} \quad (2.21)$$

Wielkości \dot{q}_l and q_l są od siebie niezależne co oznacza że $\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial q_l} = 0$, tak więc drugi składnik tego równania jest równy zeru. Jeśli tak, to równości (2.20) and (2.21) stają się identyczne I związek (2.17) jest udowodniony.

2.2.1. Zasada d'Alemberta we współrzędnych uogólnionych

Współrzędne kartezjańskie są funkcjami $f=3n-p$ współrzędnych uogólnionych (czasem też funkcją czasu) $x_j = x_j(q_1, q_2, \dots, q_f, t)$. Współrzędne przesunięcia przygotowanego w pewnej ustalonej chwili czasu można wyrazić poprzez:

$$\delta x_j = \sum_{l=1}^f \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \delta q_l \quad (2.22)$$

Z matematycznego punktu widzenia wyrażenie (2.22) jest wariacją (bez wariacji czasu) współrzędnych kartezjańskich⁵. f -wymiarowy wektor $\delta q = [\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_f]$ uogólnionym przesunięciem przygotowanym. Jak wiemy, przesunięcie przygotowane w $3n$ -wymiarowej przestrzeni konfiguracyjnej spełnie następujące warunki:

$$\sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta x_j = 0 \quad \text{for } k=1, 2, \dots, p \quad (2.23)$$

Znajdźmy warunki narzucone na składowe uogólnione przesunięcia przygotowanego:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta x_j &= \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \sum_{l=1}^f \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \delta q_l = \sum_{l=1}^f \left(\sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \right) \delta q_l = \\ &= \sum_{l=1}^f \frac{\partial f_k}{\partial q_l} \delta q_l = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Zgodnie z równaniem (2.15) wszystkie pochodne $\frac{\partial f_k}{\partial q_l} = 0$. Oznacza to że równania (2.24)

nie nakładają żadnych ograniczeń na składowe uogólnione przesunięcia przygotowanego. Gdy ruch układu punktów materialnych opisujemy w f -wymiarowej przestrzeni współrzędnych uogólnionych, opis takiego ruchu staje się podobny do opisu ruchu układu swobodnego.

Wyprowadzenie równań Lagrangea

Zasada d'Alemberta w przestrzeni konfiguracyjnej ma postać:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{3n} (X_j - m_j \ddot{x}_j) \delta x_j &= 0 \\ f_k(x, t) &= 0 \\ \sum \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta x_j &= 0 \end{aligned}$$

Podstawmy $\delta x_j = \sum_{l=1}^f \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \delta q_l$ do pierwszego równania zasady d'Alemberta. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{3n} (X_j - m_j \ddot{x}_j) \delta x_j &= \sum_{j=1}^{3n} (X_j - m_j \ddot{x}_j) \sum_{l=1}^f \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \delta q_l = \sum_{l=1}^f \sum_{j=1}^{3n} (X_j - m_j \ddot{x}_j) \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \delta q_l = \\ &= \sum_{l=1}^f \left(\sum_{j=1}^{3n} X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l} - \sum_{j=1}^{3n} m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \right) \delta q_l = 0 \end{aligned}$$

Przyjmijmy następujące oznaczenie:

$$Q_l = \sum_{j=1}^{3n} X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \quad (2.25)$$

⁵ Używamy tu terminu "wariacja" aby podkreślić że zmienne q_1, q_2, \dots, q_f też są funkcjami czasu i przedstawiają tory ruchu punktów układu w f -wymiarowej przestrzeni współrzędnych uogólnionych. Czytelnik może znaleźć rozwinięcie tego tematu w dowolnej książce poświęconej rachunkowi wariacyjnemu.

wielkość Q będziemy nazywać siłą uogólnioną. Otrzymujemy:

$$\sum_{l=1}^f \left(Q_l - \sum_{j=1}^{3n} m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \right) \delta q_l = 0 \quad (2.26)$$

Zajmiemy się drugim składnikiem tego równania. Obliczmy na początek:

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{3n} m_j \dot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l} = \sum_{j=1}^{3n} m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l} + \sum_{j=1}^{3n} m_j \dot{x}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \quad (2.26a)$$

mamy więc:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{3n} m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l} &= \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{3n} m_j \dot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l} - \sum_{j=1}^{3n} m_j \dot{x}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} = \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{3n} m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_l} - \sum_{j=1}^{3n} m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_l} = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{3n} m_j \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{x}_j^2}{\partial \dot{q}_l} - \sum_{j=1}^{3n} m_j \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{x}_j^2}{\partial q_l} = \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial \left(\frac{m_j \dot{x}_j^2}{2} \right)}{\partial \dot{q}_l} - \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial \left(\frac{m_j \dot{x}_j^2}{2} \right)}{\partial q_l} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_l} \sum_{j=1}^{3n} \frac{m_j \dot{x}_j^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q_l} \sum_{j=1}^{3n} \frac{m_j \dot{x}_j^2}{2} \end{aligned}$$

Wyrażenie $\sum_{j=1}^{3n} \frac{m_j \dot{x}_j^2}{2}$ jest energią kinetyczną układu. Oznaczając tę energię przez T

otrzymujemy:

$$\sum_{j=1}^{3n} m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l} \quad (2.27)$$

I ostatecznie mamy:

$$\sum_{l=1}^f \left(Q_l - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} + \frac{\partial T}{\partial q_l} \right) \delta q_l = 0 \quad (2.28)$$

Powyższe równanie musi być spełnione dla dowolnych wartości składowych uogólnionego przesunięcia przygotowanego δq_l . Jest to możliwe tylko wtedy gdy dla wszystkich wartości $l=1, \dots, f$ spełnione są równania:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l} = Q_l \quad \text{for } l=1, \dots, f \quad (2.29)$$

Równania Lagrangea w polu potencjalnym

Jeśli ruch układu punktów odbywa się w polu potencjalnym składowe siły dane są przez:

$$X_j = - \frac{\partial V(x, t)}{\partial x_j} \quad (2.30)$$

Składowe siły uogólnionych mają postać:

$$Q_l = \sum_{j=1}^{3n} X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l} = - \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} = - \frac{\partial V}{\partial q_l} \quad (2.31)$$

Potencjał V jest tutaj wyrażony w funkcji współrzędnych uogólnionych $V(x, t) = V(x(q, t), t) = V(q, t)$. Równania Lagrangea można wtedy zapisać w postaci:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l} = - \frac{\partial V}{\partial q_l} \quad l=1, \dots, f \quad (2.32)$$

Po przekształceniu otrzymujemy:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial(T-V)}{\partial q_l} = 0 \quad l=1, \dots, f \quad (2.33)$$

Wielkość T-V oznaczana jest przez L i nosi nazwę funkcji Lagrangea. Ostatecznie dla układu punktów materialnych poruszających się w polu potencjalnym otrzymujemy:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0 \quad (2.34)$$

Ogólne rozwiązanie równań Lagrangea ma postać

$$q_l = q_l(t, C_1, \dots, C_{2f}) \quad l=1, \dots, f=3n-p \quad (2.34a)$$

gdzie C_1, \dots, C_{2f} to $2f$ stałych zależnych od warunków początkowych.

2.3. Niezmienniki równań Lagrangea

Wyrażenie $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = p_l$ określa l -tą składową pędu uogólnionego. Równania

Lagrangea można więc zapisać w postaci:

$$\frac{dp_l}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_l} = \frac{\partial(T-V)}{\partial q_l} = -\frac{\partial V}{\partial q_l} = Q_l \quad (2.35)$$

Mamy więc:

$$\frac{dp_l}{dt} = Q_l \quad (2.36)$$

Powyższe równanie przypomina drugą zasadę dynamiki Newtona. Znajdźmy zależność pomiędzy pędem uogólnionym a “zwykłym” pędem we współrzędnych kartezjańskich w polu potencjalnym. Funkcję Lagrangea można zapisać w postaci:

$$L = L(q, \dot{q}, t) = L(x(q, t), \dot{x}(q, \dot{q}, t), t) \quad (2.37)$$

więc składowe pędu uogólnionego:

$$p_l = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \quad (2.38)$$

Biorąc pod uwagę że:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = \frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{x}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_j} \sum_{s=1}^{3n} \frac{m_s}{2} \dot{x}_s^2 = m_j \dot{x}_j = p_{x_j} \quad (2.39)$$

otrzymujemy:

$$p_l = \sum_{j=1}^{3n} p_{x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \quad (2.40)$$

Jak widać związek pomiędzy składowymi pędu uogólnionego i pędu we współrzędnych kartezjańskich jest podobny do związku (2.25) pomiędzy siłą uogólnioną z “zwykłą” siłą.

2.3.1. Współrzędne cykliczne

Przypomnijmy równania Lagrangea w postaci:

$$\frac{dp_l}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_l} \quad (2.41)$$

Założmy że funkcja Lagrangea $L(q, \dot{q}, t)$ ⁶ nie zależy od jednej ze współrzędnych uogólnionych q_s . Taka współrzędna nosi nazwę współrzędnej cyklicznej. W konsekwencji:

⁶ Pamiętajmy że $q = [q_1, \dots, q_f]$ przedstawia sobą wszystkie $f=3n-p$ współrzędnych uogólnionych, zaś $\dot{q} = [\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f]$ przedstawia wszystkie f składowych „prędkości” uogólnionej.

$$\frac{dp_s}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_s = \text{const} \quad (2.42)$$

Jak widzimy składowa pędu uogólnionego odpowiadająca współrzędnej cyklicznej jest stała w czasie, tzn. jest całką ruchu.

Symmetry in Physics (wprawka z angielskiego)

We say that a system is symmetrical when there exists such a transformation of the system which transforms it to itself. For instance if a system transfers to itself after reflection across a plane we say that the system possesses a mirror symmetry. If a physical structure transforms into itself when rotated round an axis we say it possesses an axis of symmetry. Transformation into itself leads to the conclusion that the physical properties of a system are independent of the transformation. Because the mechanical properties of a physical system are defined by its Lagrangian it is obvious that the Lagrangian must be independent of any transformation which transforms a system into itself. In other words any symmetry should be reflected by the independence of the Lagrange function of some parameter describing the symmetry. There are three main symmetries of physical space and time which are of crucial importance for analytical mechanics, namely translational symmetry of space (Lagrange function is independent of point of space), rotational symmetry (Lagrange function is independent of rotation around some axis) and translational symmetry in time (Lagrange function is not an explicit function of time).

2.3.1.1. Funkcja Lagrangea nie zależy od położenia w przestrzeni (przestrzeń jednorodna)

W przestrzeni jednorodnej funkcja Lagrangea nie zależy od wektora wodzącego, tzn. nie zależy od współrzędnych kartezjańskich x, y oraz z . Innymi słowy mamy do czynienia z symetrią translacyjną jednorodnej przestrzeni fizycznej. Jeśli tak, to funkcja Lagrangea punktu materialnego ma postać:

$$L = T - V_0 = L(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (2.43)$$

Współrzędne x, y oraz z są więc współrzędnymi cyklicznymi. W konsekwencji składowe pędu odpowiadające tym współrzędnym pozostają stałe w czasie, mamy więc:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 &\Rightarrow \frac{dp_x}{dt} = 0 \Rightarrow p_x = \text{const} \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 &\Rightarrow \frac{dp_y}{dt} = 0 \Rightarrow p_y = \text{const} \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0 &\Rightarrow \frac{dp_z}{dt} = 0 \Rightarrow p_z = \text{const} \end{aligned} \quad (2.44)$$

WNIOSEK: Prawo zachowania pędu wynika z jednorodności przestrzeni fizycznej.

2.3.1.2. Funkcja Lagrangea niezależna od obrotów w przestrzeni (przestrzeń izotropowa)

Obliczmy funkcję Lagrangea swobodnego punktu materialnego we współrzędnych sferycznych (Rys.2.3).

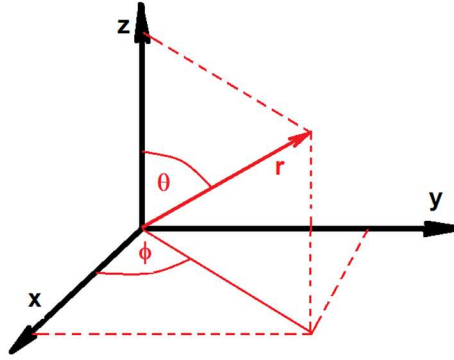


Fig.2.3. Położenie punktu materialnego jest dane poprzez długość wektora r i dwa kąty θ i ϕ .

Wykorzystując związek pomiędzy współzrzednymi kartezjańskimi i sferycznymi:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (2.45)$$

Otrzymujemy następujące wyrażenie na energię kinetyczną punktu materialnego:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \quad (2.46)$$

Zauważmy że energia kinetyczna zależy od dwu z trzech współzrzednych sferycznych r oraz θ i nie zależy od współzrzednej ϕ . Załóżmy, że energia potencjalna również jest niezależna od współzrzednej ϕ . Mamy wtedy:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - V(r, \theta) \quad (2.47)$$

Taka funkcja Lagrangea jest niezależna od kąta ϕ , jest więc niezależna od obrotów wokół osi z . Kąt ϕ jest współzrzedną cykliczną, więc składowa pędu uogólnionego odpowiadającego kątowi ϕ jest stała w czasie, tzn. jest całką ruchu.

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = mr_{xy} r_{xy} \dot{\phi} = mv_\phi r_{xy} = J_z \quad (2.47)$$

Wynika z powyższego rozumowania że zasada zachowania momentu pędu jest konsekwencją izotropowości przestrzeni.

2.3.1.3. Funkcja Lagrangea nie jest jawną funkcją czasu.

Pomnóżmy równania Lagrangea

$$\dot{p}_l = \frac{\partial L}{\partial q_l} \quad / \cdot \dot{q}_l \sum_{l=1}^{3n} \quad (2.48)$$

przez \dot{q}_l i zsumujmy tak otrzymane wyrażenie względem wskaźnika l . Otrzymujemy:

$$\sum_{l=1}^f \left(\dot{p}_l \dot{q}_l - \frac{\partial L}{\partial q_l} \dot{q}_l \right) = 0 \quad (2.49)$$

Obliczmy następującą pochodną:

$$\frac{d}{dt} (p_l \dot{q}_l) = \dot{p}_l \dot{q}_l + p_l \ddot{q}_l \quad (2.50)$$

Korzystając z wyrażenia (2.50) otrzymujemy:

$$\sum_{l=1}^f \left(\frac{d}{dt} (p_l \dot{q}_l) - p_l \ddot{q}_l - \frac{\partial L}{\partial q_l} \dot{q}_l \right) = \sum_{l=1}^f \left(\frac{d}{dt} (p_l \dot{q}_l) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \ddot{q}_l - \frac{\partial L}{\partial q_l} \dot{q}_l \right) \quad (2.51)$$

Pochodna funkcji Lagrangea względem czasu ma postać:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_l \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \ddot{q}_l \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \quad (2.52)$$

mamy więc:

$$\sum_{l=1}^f \frac{d}{dt} (p_l \dot{q}_l) - \frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (2.53)$$

Przekształcając (2.53) otrzymujemy :

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{l=1}^f p_l \dot{q}_l - L \right) = - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (2.54)$$

Oznaczmy $G = \sum_{l=1}^f p_l \dot{q}_l - L$. Mamy wtedy:

$$\frac{dG}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (2.55)$$

Jeżeli funkcja Lagrangea nie jest jawną funkcją czasu, tzn. jeśli $\partial L / \partial t = 0$ to wielkość G jest całką ruchu. Pokażemy, że przy pewnych założeniach G jest energią całkowitą układu. **TWIERDZENIE:** Jeśli współrzędne koordynacyjne wyrażone jako funkcje współrzędnych uogólnionych nie są jawną funkcją czasu, tzn. jeśli $x_j = x_j(q)$ i mamy do czynienia z ruchem w polu potencjalnym, tzn. $V = V(q, t)$, to funkcja G jest energią całkowitą układu, tzn. $G = T + V$.

Dla udowodnienia powyższego twierdzenia skorzystamy z dwu twierdzeń pomocniczych.

LEMAT 1: Jeśli $x_j = x_j(q)$ to $T = \sum_{l=1}^f \sum_{k=1}^f a_{lk} \dot{q}_l \dot{q}_k$, tzn. energia kinetyczna jest formą kwadratową prędkości uogólnionych.

Energia kinetyczna układu punktów materialnych ma postać $T = \sum_{j=1}^{3n} \frac{m_j}{2} \dot{x}_j^2$. Biorąc pod

uwagę że $\dot{x}_j = \sum_{l=1}^f \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \dot{q}_l$ otrzymujemy:

$$T = \sum_{j=1}^{3n} \frac{m_j}{2} \sum_{l=1}^f \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \dot{q}_l \sum_{k=1}^f \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_k = \sum_{j=1}^{3n} \sum_{l=1}^f \sum_{k=1}^f \frac{m_j}{2} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_l \dot{q}_k \quad (2.56)$$

Ponieważ wynik sumowania nie zależy od kolejności sumowania otrzymujemy:

$$T = \sum_{l=1}^f \sum_{k=1}^f \left(\sum_{j=1}^{3n} \frac{m_j}{2} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \right) \dot{q}_l \dot{q}_k = \sum_{l=1}^f \sum_{k=1}^f a_{lk} \dot{q}_l \dot{q}_k \quad (2.57)$$

Wyrażenie $\left(\sum_{j=1}^{3n} \frac{m_j}{2} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \right)$ zależy od wskaźników l i k , można więc oznaczyć ją przez a_{lk} .

LEMAT 2: Jeżeli $f(x_1, \dots, x_n)$ jest jednorodnym wielomianem stopnia n to

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = n f \quad (2.58)$$

Funkcję G można zapisać w postaci:

$$G = \sum_{l=1}^f p_l \dot{q}_l - L = \sum_{l=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \dot{q}_l - L \quad (2.59)$$

$L=T-V(q,t)$, więc pochodna $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}$, mamy więc:

$$G = \sum_{l=1}^f \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \dot{q}_l - L = 2T - T + V = T + V \quad (2.60)$$

Ponieważ T jest jednorodnym wielomianem stopnia 2, więc $\sum_{l=1}^f \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \dot{q}_l = 2T$.

2.4. The action principle (wprawka z angielskiego)

We derived the Lagrange's equations from Newton's equations of motion. This is not the only way to get the Lagrange's equations. The equations can be obtained in another, very general way. In order to show this alternative way to get the Lagrange's equations we must get familiar with some concepts of calculus of variations.

2.4.1. Functions and functionals

A function is a relation between a set of inputs and a set of permissible outputs assuming that each input is related to exactly one output. The input to a function is called an

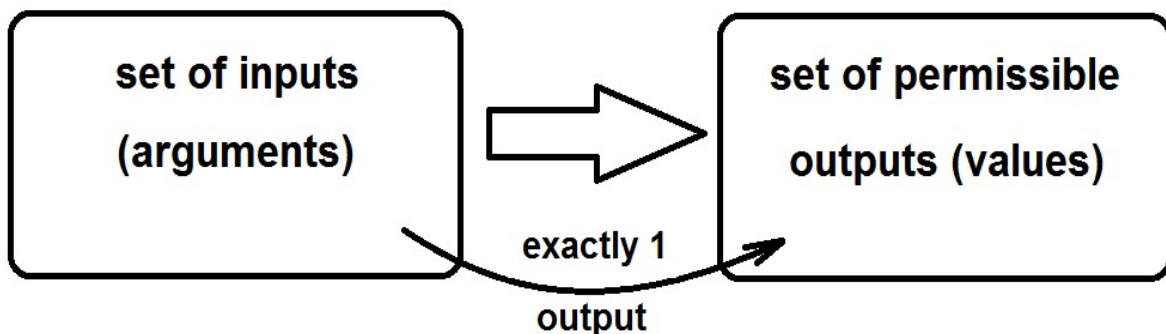


Fig.2.4. FUNCTION: relation between a set of inputs and a set of permissible outputs. Each input related to one output.

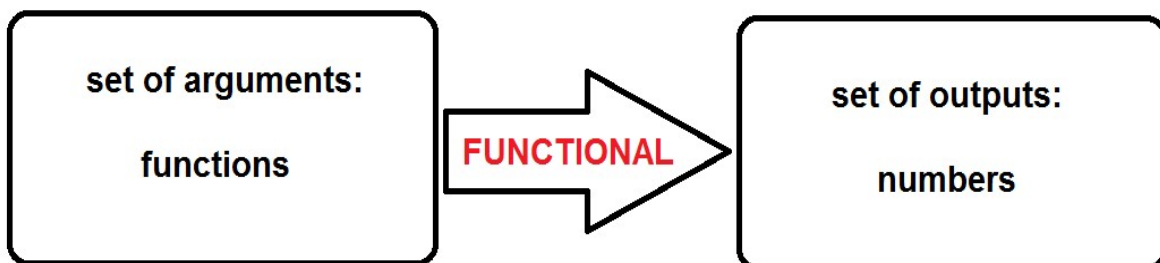


Fig.2.5. In case of functional arguments are functions.

argument and the output is called the value of function. In case of functions both the set of arguments and the set of values are numbers.

When the set of arguments is a set of functions, and a set of values is a set of numbers we have to do with a functional. Definite integral

$$F[f(x)] = \int_a^b f(x) dx \quad (2.61)$$

is a good example of a functional. We often use square brackets in order to emphasize the fact that functional F is a function of functions.

2.4.2. The action principle

Let us suppose we have a system of point-like particles subject to holonomic constraints. Let the number of degrees of freedom be $f=3n-p$, so a motion of the system is given by f generalized coordinates $q_i(t)$ ($i=1, \dots, f$). The Lagrange function of such a system is given by $L(q(t), \dot{q}(t), t)$. The action for such a motion is defined:

$$I[q(t)] = \int_{t_0}^t L(q(t), \dot{q}(t), t) dt \quad (2.62)$$

The action is a functional, the set of arguments are functions $q_1(t), \dots, q_f(t)$. Among many functions describing possible motion between two fixed point of time t_0 and t , one set of functions q_f refers to the path actually taken between the two points. For this set of functions the functional $I[q(t)]$ has its minimum.

$$I[q(t)] = \int_{t_0}^t L(q(t), \dot{q}(t), t) dt \dots \text{has its..min..} \Rightarrow \dots q(t) \text{ correspond to real motion}$$

It results from detailed considerations of calculus of variations that the functional (2.62) has its minimum for Lagrange functions satisfying the Lagrange equations:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

2. PRZESTRZEŃ FAZOWA, RÓWNANIA HAMILTONA

Położenie układu punktów materialnych w trójwymiarowej przestrzeni może być określone przez $3n$ współrzędnych kartezjańskich x_j lub przez $f=3n-p$ współrzędnych uogólnionych q_l . Aby przewidzieć rozwój układu w czasie potrzebne są dodatkowo początkowe wartości prędkości lub pędu. Mówimy, że położenie oraz pędy punktów układu w pewnej chwili czasu określają jego stan. Zbiór wartości współrzędnych (w przypadku układów nieswobodnych współrzędnych uogólnionych) i wartości pędów wyznaczają położenie układu w PRZESTRZENI FAZOWEJ. Przestrzeń fazowa jest ważnym pojęciem w fizyce, używanym w mechanice i fizyce statystycznej. Ruch układu w przestrzeni fazowej można określić rozwiązując równania Hamiltona.

Równania Hamiltona są elementem tzw. hamiltonowskiego sformułowania mechaniki. Jeśli rozpatrywać tylko zagadnienia mechaniczne, równania Hamiltona nie wnoszą wiele przy rozwiązywaniu problemów. Jednak pojęcia wniesione przez hamiltonowską postać mechaniki, w szczególności sama funkcja Hamiltona, są niezbędne przy studiowaniu innych działów fizyki, szczególnie mechaniki kwantowej.

2.1. Równania Hamiltona

Zdefiniowana wcześniej funkcja $G = \sum_{l=1}^f p_l \dot{q}_l - L$ jest funkcją współrzędnych, prędkości, pędów i czasem jest również jawną funkcją czasu. Zapiszmy tę funkcję w postaci:

$$G = \sum_{l=1}^f p_l v_l - L \quad (3.1)$$

WSTAWKA MATEMATYCZNA: Weźmy $3n$ funkcji $x_j(q_1, \dots, q_f, t)$ określających związki pomiędzy $3n$ współrzędnymi konfiguracyjnymi a $3n-p$ współrzędnymi uogólnionymi. W ogólności funkcje te mogą być jawnymi funkcjami czasu, choć nas interesuje przypadek $x_j(q_1, \dots, q_f)$. Wariację tych funkcji mają postać:

$$\delta x_j = \sum_{l=1}^f \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{\partial x_j}{\partial t} dt \quad (3.2)$$

Symboli δ zamiast d używamy tu dla podkreślenia że zmienne q_l są funkcjami czasu. Wyrażenie (3.2) zwane jest wariacją współrzędnych x_j z wariacją czasu. Gdy chcemy otrzymać wariację współrzędnych x_j dla ustalonej chwili czasu mamy:

$$\delta x_j = \sum_{l=1}^f \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \delta q_l \quad (3.3)$$

Powyższe wyrażenie jest zwane wariacją x_j z wariacją czasu⁷.

Obliczmy wariację funkcji $G = \sum_{l=1}^f p_l v_l - L$. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \delta G &= \delta \sum_{l=1}^f p_l v_l - \delta L = \sum_{l=1}^f \delta(p_l v_l) - \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{\partial L}{\partial v_l} \delta v_l \right) = \\ &= \sum_{l=1}^f (p_l \delta v_l + v_l \delta p_l) - \sum_{l=1}^f (\dot{p}_l \delta q_l + p_l \delta v_l) = \sum_{l=1}^f (v_l \delta p_l - \dot{p}_l \delta q_l) = \sum (\dot{q}_l \delta p_l - \dot{p}_l \delta q_l) \end{aligned} \quad (3.4)$$

⁷ Rachunek wariacyjny jest ważną częścią matematyki, stosowanym m.in. przy sformułowaniu tzw. wariacyjnych zasad mechaniki. Przedmiotem rachunku wariacyjnego jest m.in. poszukiwanie warunków ekstremów funkcjonałów (tzn. wyrażeń będących funkcjami funkcji). Dla celów niniejszego skryptu będziemy używać prostych analogii pomiędzy funkcjami i funkcjonałami.

Poprzednio używaliśmy funkcji G jako funkcji współrzędnych uogólnionych q_l , prędkości uogólnionych $\dot{q}_l = v_l$, pędów uogólnionych $p_l = \partial L / \partial \dot{q}_l$ i niekiedy czasu t. Zauważmy że jest możliwe zastąpienie składowych prędkości uogólnionych v_l przez składowe pędów uogólnionych p_l poprzez użycie definicji pędów uogólnionych $p_l = \partial L / \partial \dot{q}_l$ ⁸. Zastępując prędkości pędami otrzymujemy:

$$G(q, v, p, t) \Rightarrow H(q, p, t) \quad (3.5)$$

Funkcja H(q,p,t) zwana jest funkcją Hamiltona. Obliczmy wariację funkcji Hamiltona bez wariacji czasu:

$$\delta H = \sum \left(\frac{\partial H}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{\partial H}{\partial p_l} \delta p_l \right) \quad (3.6)$$

Porównajmy wyrażenia (3.4) i (3.6). Obydwa te wyrażenia przedstawiają wariacje funkcji G I funkcji H, tzn. tych samych funkcji, choć zapisanych przy użyciu innych zmiennych. Odejmując (3.4) od (3.6) otrzymujemy:

$$\delta H - \delta L = 0 = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial q_l} + \dot{p}_l \right) \delta q_l + \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial p_l} - \dot{q}_l \right) \delta p_l \quad (3.7)$$

Wyrażenie (3.7) musi być spełnione dla dowolnych wariacji δq_l i δp_l . Jest to możliwe tylko wtedy gdy:

$$\begin{aligned} \dot{q}_l &= \frac{\partial H}{\partial p_l} \\ -\dot{p}_l &= \frac{\partial H}{\partial q_l} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Powyższe równania są układem równań Hamiltona.

⁸ Zastąpienie prędkości pędami w praktyce jest możliwe jeśli potrafimy rozwiązać układ 3n-p równań $p_l = \partial L / \partial \dot{q}_l$ zmiennych v_l . Jednak nawet gdy nie potrafimy rozwiązać tego układu zakładamy że istnieje jednoznaczne przyporządkowanie $p_l = p_l(v_1, \dots, v_f)$.

4. CAŁKI RUCHU, NAWIASY POISSONA

Rozważmy układ punktów materialnych poddanych więzom holonomicznym dwustronnym o $f=3n-p$ stopniach swobody. Załóżmy, że istnieje funkcja postaci:

$$F(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) = C(const.) \quad (4.1)$$

która jest spełniona przez dowolne rozwiązanie równań Lagrangea opisującego ten ruch. Taka funkcja (4.1) nosi nazwę *całki pierwszej ruchu* lub *stałej ruchu*. Natomiast dowolna funkcja postaci:

$$F(q_1, \dots, q_f, t) = C(const.) \quad (4.2)$$

zwana jest całką drugą ruchu. Całki drugie odgrywają w opisie zjawisk mniejszą rolę od całek pierwszych.

Załóżmy, że mamy s różnych pierwszych całek ruchu F_1, \dots, F_s . Dowolna funkcja $G(F_1, \dots, F_s) = const$ jest stała w czasie, jest więc także całką ruchu, lecz jednocześnie jest funkcją zależną od funkcji F_1, \dots, F_s .

Znajomość całek ruchu może dostarczyć istotnych informacji o przebiegu zjawisk fizycznych. W szczególności:

- (i) Człki pierwsze często dostarczają informacji o podstawowych właściwościach układów
- (ii) W niektórych przypadkach całki pierwsze ruchu wynikają z fundamentalnych zasad zachowania takich jak zasada zachowania pędu, momentu pędu lub zasada zachowania energii.

Nawiasy Poissona są sposobem znajdowania nowych jeśli znane są minimum dwie całki ruchu.

4.1. Nawiasy Poissona

Załóżmy, że mamy dwie funkcje $F(q,p,t)$ and $G(q,p,t)$ określone w przestrzeni fazowej, tzn. są to funkcje uogólnionych współrzędnych i pędów. Nawiasem Poissona tych funkcji nazywamy wyrażenie:

$$(F, G) = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) \quad (4.3)$$

Podstawowe właściwości nawiasów Poissona:

$$(F, G) = -(G, F) \quad (4.4)$$

$$(F, F) = 0 \quad (4.5)$$

$$(F_1 + F_2, G) = (F_1, G) + (F_2, G) \quad (4.6)$$

$$(F_1 F_2, G) = F_1 (F_2, G) + F_2 (F_1, G) \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (F, G) = \left(\frac{\partial F}{\partial t}, G \right) + \left(F, \frac{\partial G}{\partial t} \right) \quad (4.8)$$

$$(F_1, (F_2, F_3)) + (F_2, (F_3, F_1)) + (F_3, (F_1, F_2)) = 0 \quad (4.9)$$

4.1.1. Równanie ruchu wielkości fizycznej $F(q,p,t)$

Obliczmy szybkość zmiany w czasie pewnej wielkości fizycznej $F(q,p,t)$:

$$\frac{dF}{dt} = \sum \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial F}{\partial p_l} \dot{p}_l \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (4.10)$$

Stosując równania Hamiltona otrzymujemy:

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (4.11)$$

Więc ostatecznie mamy:

$$\frac{dF}{dt} = (F, H) + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (4.12)$$

Dla $F=H$ dostajemy:

$$\frac{dH}{dt} = (H, H) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (4.13)$$

Z równania (4.13) wynika że jeśli funkcja Hamiltona zależy od czasu, to tylko w sposób jawny.

4.1.2. Twierdzenie Poissona-Jacobiego

Załóżmy, że dla pewnego układu znamy dwie całki ruchu $F_1(q,p,t)$ and $F_2(q,p,t)$.

Zgodnie z twierdzeniem Poissona-Jacobiego nawias Poissona tych dwu funkcji też jest całką ruchu, tzn. $(F_1, F_2) = \text{const}$.

Dla dowodu wykorzystamy właściwość (4.9) nawiasów Poissona przyjmując że $F_3=H$, tzn. F_3 jest funkcją Hamiltona układu:

$$(F_1, (F_2, H)) + (F_2, (H, F_1)) + (H, (F_1, F_2)) = 0 \quad (4.14)$$

Obliczmy pochodną względem czasu funkcji F_1 i F_2 . Korzystając z równości (4.12) otrzymujemy:

$$\frac{dF_2}{dt} = (F_2, H) + \frac{\partial F_2}{\partial t} \implies (F_2, H) = \frac{dF_2}{dt} - \frac{\partial F_2}{\partial t} = -\frac{\partial F_2}{\partial t} \quad (4.15)$$

$$\frac{dF_1}{dt} = (F_1, H) + \frac{\partial F_1}{\partial t} \implies (H, F_1) = \frac{\partial F_2}{\partial t} - \frac{dF_1}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (4.16)$$

$$\frac{d(F_1, F_2)}{dt} = ((F_1, F_2), H) + \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial t} \quad (4.17)$$

Przekształcając (4.17) dostajemy:

$$(H, (F_1, F_2)) = \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial t} - \frac{d(F_1, F_2)}{dt} \quad (4.18)$$

Podstawiając (4.15), (4.16) i (4.18) do (4.14) otrzymujemy:

$$\left(F_1, -\frac{\partial F_2}{\partial t} \right) + \left(F_2, \frac{\partial F_1}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial t}, F_2 \right) + \left(F_1, \frac{\partial F_2}{\partial t} \right) = \frac{d(F_1, F_2)}{dt} \quad (4.19)$$

Składniki pierwszy i czwarty oraz drugi i trzeci mają tę samą wartość bezwzględną lecz przeciwne znaki, więc ostatecznie:

$$\frac{d(F_1, F_2)}{dt} = 0 \quad (4.20)$$