

Temat 6. Tensorowy opis właściwości optycznych jednorodnych ośrodków anizotropowych

6.1. Właściwości ośrodka i postać tensora (nie)przenikalności

1. Dowolny ośrodek absorbujący

Równanie fali płaskiej

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \exp[i\omega(t - n \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}/c)] . \quad (5.16)$$

Zgodnie z równaniem (5.16), zmiana amplitudy fali ze wzrostem drogi $|\mathbf{r}|$ przebytej w kierunku \mathbf{s} występuje jedynie w przypadku $\text{Im}[n] \neq 0$.

W układzie współrzędnych XYZ gdzie $\mathbf{s} \parallel Z$

$$n_{f,s}^2 = \frac{2}{B_{xx} + B_{yy} \pm \sqrt{(B_{xx} - B_{yy})^2 + 4B_{xy}B_{yx}}} \quad (5.30)+(5.31)$$

$\text{Im}[n] \neq 0$ otrzymujemy dla zespolonego tensora \mathbf{B} , w którym $B_{xy} \neq B_{yx}^*$ lub $\text{Im}[B_{ii}] \neq 0$

Biorąc pod uwagę tensor zapisany w dowolnym układzie współrzędnych, otrzymujemy niehermitowski tensor zespolony

$$B_{ij} \neq B_{ji}^* . \quad (6.1)$$

c.d. Właściwości ośrodka i postać tensora (nie)przenikalności

Kąt przekątnej fali szybszej:
$$\sin \beta_f = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{B_{yy} - B_{xx}}{\sqrt{(B_{xx} - B_{yy})^2 + 4B_{xy}B_{xy}^*}}}, \quad (5.40)$$

Różnica faz składowych \mathcal{E}_x i \mathcal{E}_y :
$$\sin \delta = \frac{\text{Im}[B_{xy}^*]}{|B_{xy}|}, \quad (5.42)$$

2. Ośrodek nieabsorbujący eliptyczny

Ośrodek nieabsorbujący jest opisany hermitowskim tensorem nieprzenikalności:

$$B_{ij} = B_{ji}^*, \quad (6.2)$$

Warunek (6.2) prowadzi do dowolnych polaryzacji eliptycznych, tzn. o dowolnych β_f i δ .

3. Ośrodek nieabsorbujący liniowy

W ośrodku liniowo dwójłomnym $\delta = 0^\circ$ lub 180° i wg. wzoru (5.42) $\text{Im}[B_{xy}] = 0$.

Uwzględniając liniowość w dowolnym kierunku światła, a także związek (6.2) otrzymujemy:

$$B_{ij} = B_{ji} \quad \text{oraz} \quad \text{Im}[B_{ij}] = 0 \quad \text{dla każdego } i, j. \quad (6.3)$$

4. Ośrodek nieabsorbujący kołowy

W ośrodku kołowo dwójłomnym $\beta_f = 45^\circ$ i $\delta = \pm 90^\circ$; wg. (5.40) i (5.42) $B_{xx} = B_{yy}$ i $\text{Re}[B_{xy}] = 0$.

Uwzględniając kołowość w dowolnym kierunku światła, a także związek (6.2) otrzymujemy:

$$B_{ij} = -B_{ji} \quad \text{dla każdego } i, j \quad \text{oraz} \quad \text{Im}[B_{ji}] \neq 0 \quad \text{dla } i \neq j, \quad (6.4)$$

$$B_{11} = B_{22} = B_{33} \quad \text{oraz} \quad \text{Re}[B_{ji}] = 0 \quad \text{dla } i \neq j. \quad (6.5)$$

c.d. Właściwości ośrodka i postać tensora (nie)przenikalności

Podsumowanie:

Tensorom nieprzenikalności dla częstotliwości optycznych można opisać:

- *dwójłomność liniowa* – symetryczna część rzeczywista $[B_{ij}]$,
- *dwójłomność kołowa* – antysymetryczna część urojona $[B_{ij}]$,
- *absorpcja, dichroizm* – niehermitowska część $[B_{ij}]$.

Wszystkie wyżej wymienione efekty można podzielić na:

- *efekty naturalne* – opisane tensorem $[B_{ij}]$ przy braku zewnętrznych zaburzeń,
- *efekty indukowane* – opisane zmianami $[B_{ij}]$ z powodu zewnętrznej przyczyny, np.:
 - *efekt piezooptyczny* – spowodowany przez naprężenie,
 - *efekt elastoptyczny* – odkształcenie,
 - efekty indukowane przez pole elektryczne
 - *efekty elektroptyczne* – zmiany symetrycznej części rzeczywistej $[B_{ij}]$,
 - *indukowana aktywność optyczna* – zmiany antysym. części urojonej $[B_{ij}]$,
 - *elektroabsorbcja* – zmiany niehermitowskiej części $[B_{ij}]$.

6.2. Efekty elektrooptyczne

Efekty elektrooptyczne polegają na zmianie rzeczywistej części współczynników załamania światła pod wpływem przyłożonego pola elektrycznego.

Efekt Kerra, został odkryty w ośrodkach izotropowych, które pod wpływem przyłożonego pola stają się ośrodkami liniowo dwójłomnymi jednoosiowymi, tzn. tensor nieprzenikalności zapisany w układzie jego osi głównych xyz , gdzie $z \parallel \mathbf{E}$, przyjmuje postać

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} n_o^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & n_o^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & n_e^{-2} \end{bmatrix}, \quad (6.6)$$

gdzie:

- n_o - współczynnika załamania promienia zwyczajnego (*ang. ordinary*),
- n_e - współczynnika załamania promienia nadzwyczajnego (*ang. extraordinary*).

Tradycyjnie efekt Kerra opisuje się wzorem [a]:

$$\Delta n = \lambda K E^2, \quad (6.7)$$

gdzie:

- $\Delta n = n_e - n_o$ – dwójłomność,
- λ – długość fali świetlnej,
- K – stała Kerra,
- E – pole elektryczne stałe lub małej częstotliwości przyłożone prostopadle do kierunku światła.

W zależności od ośrodka stała Kerra może przyjmować wartości dodatnie i ujemne.

c.d. Efekty elektrooptyczne

Do tensorowego opisu efektów elektrooptycznych w dowolnych ośrodkach wykorzystuje się rozwinięcie w szereg potęgowy [6,a]:

$$\operatorname{Re}[B_{ij}] = \delta_{ij}n_{0i}^{-2} + r_{ijk}E_k + q_{ijkl}E_kE_l + \dots, \quad (6.8)$$

gdzie:

B_{ij} – składowe tensora nieprzenikalności,

δ_{ij} – delta Kroneckera,

n_{0i} – główne współczynniki załamania światła przy braku pola E ,

r_{ijk} – wsp. liniowego efektu elektrooptycznego (Pockelsa) [mV^{-1}],

q_{ijkl} – wsp. kwadratowego efektu elektrooptycznego (Kerra) [m^2V^{-2}],

... – wyrazy opisujące efekty wyższych rzędów.

Ponieważ część rzeczywista tensora \mathbf{B} jest symetryczna i kolejność mnożenia przez składowe E_k, E_l nie ma znaczenia

$$r_{ijk} = r_{jik} \text{ symetria } [\text{V}^2]\text{V}; \quad q_{ijkl} = q_{jikl} = q_{jilk} \text{ symetria } [\text{V}^2][\text{V}^2]. \quad (6.9)$$

W literaturze często stosowana jest skrócona forma zapisu indeksów [6,a]

$$\operatorname{Re}[\Delta B_i] = r_{ik}E_k + q_{il}E_l^2 + \dots, \quad i, l = 1, 2, \dots, 6, \quad (6.10)$$

gdzie zastępowanie par indeksów przez pojedynczy indeks odbywa się wg reguły

$$xx \rightarrow 1, yy \rightarrow 2, zz \rightarrow 3, yz \rightarrow 4, xz \rightarrow 5, xy \rightarrow 6. \quad (6.11)$$

Przykład 6.1 – opis efektu Kerra

Przeanalizujemy związki pomiędzy opisem tensorowym (6.8) i skalarnym (6.7) na przykładzie ośrodka izotropowego o symetrii $\infty\infty m$, dla którego:

$B_{ij}(E=0)$	r_{ij}	q_{ij}	
$\begin{bmatrix} n_0^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & n_0^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & n_0^{-2} \end{bmatrix},$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$	$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ q_{12} & q_{11} & q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ q_{12} & q_{12} & q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix},$	(6.12)
		$\times = 2(q_{11} - q_{12}).$	

W układzie współrzędnych XYZ, w którym $\mathbf{s}||Z$, a pole elektryczne $\mathbf{E} = [E, 0, 0]$, podstawienie tensorów (6.12) do wzoru (6.8) prowadzi do:

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{22} \\ B_{33} \\ B_{23} \\ B_{13} \\ B_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_0^{-2} + q_{11}E^2 \\ n_0^{-2} + q_{12}E^2 \\ n_0^{-2} + q_{12}E^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

c.d. Przykład 6.1 – opis efektu Kerra

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{22} \\ B_{33} \\ B_{23} \\ B_{13} \\ B_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_0^{-2} + q_{11}E^2 \\ n_0^{-2} + q_{12}E^2 \\ n_0^{-2} + q_{12}E^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

Stąd i ze wzorów (5.30) i (5.31) otrzymujemy współczynniki załamania światła:

$$n_f = \frac{1}{\sqrt{n_0^{-2} + \frac{1}{2}(q_{11} + q_{12} + |q_{11} - q_{12}|)E^2}} \approx n_0 - \frac{1}{4}n_0^3(q_{11} + q_{12} + |q_{11} - q_{12}|)E^2, \quad (6.14)$$

$$n_s = \frac{1}{\sqrt{n_0^{-2} + \frac{1}{2}(q_{11} + q_{12} - |q_{11} - q_{12}|)E^2}} \approx n_0 + \frac{1}{4}n_0^3(q_{11} + q_{12} - |q_{11} - q_{12}|)E^2, \quad (6.15)$$

co daje moduł dwójłomności

$$|\Delta n| = n_s - n_f = \frac{1}{2}n_0^3|q_{11} - q_{12}|E^2. \quad (6.16)$$

$$\Delta n = \lambda K E^2 \quad (6.7)$$

Podstawiając wzór (6.16) do (6.7) otrzymujemy

$$|K| = \frac{n_0^3}{2\lambda}|q_{11} - q_{12}|. \quad (6.17)$$

c.d. Przykład 6.1 – opis efektu Kerra

o - ordinary \longrightarrow

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} n_o^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & n_o^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & n_e^{-2} \end{bmatrix}, \quad \text{współrzędne } xyz, \quad (6.6)$$

gdzie $z \parallel \mathbf{E}$

0 - dla $E = 0$ \longrightarrow

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{22} \\ B_{33} \\ B_{23} \\ B_{13} \\ B_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_o^{-2} + q_{11}E^2 \\ n_o^{-2} + q_{12}E^2 \\ n_o^{-2} + q_{12}E^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad \text{współrzędne } XYZ, \quad (6.13)$$

gdzie $X \parallel \mathbf{E}$

$$|K| = \frac{n_0^3}{2\lambda} |q_{11} - q_{12}|. \quad (6.17)$$

Tensory (6.6) i (6.13) są zapisane w różnych układach współrzędnych, które są obrócone względem siebie o kąt 90° wokół osi Y . Biorąc to pod uwagę można znaleźć, że

$$n_e^{-2} = n_o^{-2} + q_{11}E^2, \quad n_o^{-2} = n_o^{-2} + q_{12}E^2. \quad (6.18)$$

Stąd, znak dwójłomności $\Delta n = n_e - n_o$ pokrywa się ze znakiem różnicy $q_{12} - q_{11}$ i ostatecznie

$$K = -\frac{n_0^3}{2\lambda} (q_{11} - q_{12}). \quad (6.19)$$

6.3. Efekty opisane antysymetryczną urojoną częścią tensora nieprzenikalności

Rozważmy jednorodny nieabsorbujący ośrodek aktywny optycznie. Pole elektryczne fali świetlnej \mathbf{E} powoduje wzbudzenie indukcji elektrycznej \mathbf{D}

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E} = \varepsilon_0 \{ \text{Re}[\boldsymbol{\varepsilon}] + i[\mathbf{G}] \} \mathbf{E}. \quad (6.20)$$

Ponieważ tensor $[\boldsymbol{\varepsilon}]$ jest zespolony i hermitowski, jego antysymetryczna część urojona $[\mathbf{G}]$ zawiera trzy składowe niezależne i iloczyn $[\mathbf{G}]\mathbf{E}$ można zastąpić przez iloczyn wektorów $[\mathbf{a}]$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \{ \text{Re}[\boldsymbol{\varepsilon}] \mathbf{E} + i \mathbf{G} \times \mathbf{E} \}, \quad (6.21)$$

gdzie *wektor skręcenia* $\mathbf{G} = [G_x, G_y, G_z]$ jest złożony ze składowych tensora $[\mathbf{G}]$

$$[\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 0 & -G_z & G_y \\ G_z & 0 & -G_x \\ -G_y & G_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.22)$$

Wektor skręcenia \mathbf{G} zależy od kierunku \mathbf{s} propagacji fali świetlnej w ośrodku $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

$$\mathbf{G} = [\mathbf{g}]\mathbf{s}, \quad (6.23)$$

gdzie $[\mathbf{g}]$ jest symetrycznym rzeczywistym pseudotensorem drugiej rangi, nazywanym *tensorem skręcenia* (*ang. gyration tensor*).

c.d. Efekty opisane antysymetryczną urojoną częścią tensora nieprzenikalności

Gdy zewnętrzne pole elektryczne \mathbf{E} stałe lub o małej częstotliwości zostanie przyłożone do ośrodka, tensor skręcenia $[\mathbf{g}]$ można wyrazić następującym szeregiem $[\mathbf{a}]$:

$$g_{ij} = g_{ij}^{(0)} + \gamma_{ijk}E_k + \beta_{ijkl}E_kE_l + \dots, \quad (6.24)$$

gdzie:

$g_{ij}^{(0)}$ - składowe pseudotensora naturalnej aktywności optycznej
(*ang. natural gyration tensor*),

γ_{ijk} - składowe pseudotensora liniowej indukowanej aktywności optycznej
(*ang. linear electrogyration tensor*),

β_{ijkl} - składowe pseudotensora kwadratowej indukowanej aktywności optycznej.

Wymienione wyżej wielkości są pseudotensorami o symetriach wewnętrznych odpowiednio $\varepsilon[V^2]$, $(\varepsilon[V^2])V$, $(\varepsilon[V^2])[V^2]$.

Znajomość tensora skręcenia $[\mathbf{g}]$, a co za tym idzie wektora skręcenia \mathbf{G} dla danego \mathbf{s} , pozwala na wyznaczenie antysymetrycznej urojonej części tensora nieprzenikalności $[\mathbf{B}]$ według wzoru [c]

$$\text{Im}[\mathbf{B}] = -\text{Re}[\mathbf{B}][\mathbf{G}]\text{Re}[\mathbf{B}]. \quad (6.25)$$

Przykład 6.2 – naturalna aktywność optyczna

W ośrodkach izotropowych o symetrii $\infty\infty m$ wszystkie składowe tensora $[\mathbf{g}^{(0)}]$ ulegają wyzerowaniu i aktywność optyczna nie może wystąpić. Przeanalizujemy ośrodek izotropowy o symetrii $\infty\infty$, dla której tensory mają postać $[\mathbf{a}]$:

Naturalna aktywność optyczna $g_{ij}^{(0)}$	Naturalna dwójłomność liniowa $\text{Re} [B_{ij}^{(0)}]$
$\begin{bmatrix} g_{11}^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & g_{11}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & g_{11}^{(0)} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n_0^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & n_0^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & n_0^{-2} \end{bmatrix}$

Postać podanych tensorów jest taka sama w każdym układzie współrzędnych. Wybierzmy układ, w którym światło rozchodzi się wzdłuż osi Z, czyli $\mathbf{s} = [0, 0, 1]$. Ze wzoru (6.23) otrzymujemy wektor skręcenia

$$\mathbf{G} = [\mathbf{g}]s = \begin{bmatrix} g_{11}^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & g_{11}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & g_{11}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_{11}^{(0)} \end{bmatrix}. \quad (6.26)$$

Stąd i ze wzoru (6.25)

$$[\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 0 & -G_z & G_y \\ G_z & 0 & -G_x \\ -G_y & G_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -g_{11}^{(0)} & 0 \\ g_{11}^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.27)$$

c.d. Przykład 6.2 – naturalna aktywność optyczna

Podstawiając $[\mathbf{G}]$ (6.27) do (6.25) otrzymujemy antysymetryczną część urojoną tensora $[\mathbf{B}]$

$$\text{Im}[\mathbf{B}] = - \begin{bmatrix} n_0^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & n_0^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & n_0^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -g_{11}^{(0)} & 0 \\ g_{11}^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_0^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & n_0^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & n_0^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n_0^{-4} g_{11}^{(0)} & 0 \\ -n_0^{-4} g_{11}^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

i po połączeniu części rzeczywistej z częścią urojoną

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} n_0^{-2} & i n_0^{-4} g_{11}^{(0)} & 0 \\ -i n_0^{-4} g_{11}^{(0)} & n_0^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & n_0^{-2} \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

Podstawiając składowe tensora (6.29) do wzorów (5.40)-(5.43) otrzymujemy:

Kąt przekątnej fali
szybszej i wolniejszej: $\beta_f = \beta_s = 45^\circ$ (6.30)

Różnice faz składowej
 x do y w fali szybszej
i wolniejszej: $\delta_f = -\delta_s = \begin{cases} +90^\circ, & \text{dla } g_{11}^{(0)} < 0, \\ -90^\circ, & \text{dla } g_{11}^{(0)} > 0. \end{cases}$ (6.31)

Dowód występowania efektu skręcenia płaszczyzny polaryzacji światła w ośrodku opisanym tensorem (6.29) będzie podany dalej po wprowadzeniu rachunku Jonesa.

Problem 3 do przećwiczenia

Wykorzystując definicję tensora nieprzenikalności $[\mathbf{B}] = [\boldsymbol{\epsilon}]^{-1}$ wyprowadzić związek:

$$\text{Im}[\mathbf{B}] = -\text{Re}[\mathbf{B}][\mathbf{G}]\text{Re}[\mathbf{B}]. \quad (6.25)$$

Czy związek (6.25) jest dokładny?

Jeżeli (6.25) nie jest dokładnym związkiem, to czy przybliżenie można uznać za uzasadnione w typowym przypadku, gdy składowe tensora naturalnej aktywności optycznej $g_{ij}^{(0)}$ są mniejsze o kilka rzędów wielkości od współczynników załamania światła?

Literatura do tematu 6

[6] F. Ratajczyk, „*Dwójłomność i polaryzacja optyczna*”, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2000.

Literatura specjalistyczna w języku angielskim do rozdziałów 6.2 i 6.3:

- [a] Y.I. Sirotin, M.P. Shaskolskaya, „*Fundamentals of crystal physics*”. Moskwa: Mir Publishers (1982).
- [b] H.G. Tompkins, E.A. Irene, „*Handbook of ellipsometry*”. Norwich: William Andrew (2005).
- [c] T.A. Maldonado, T.K. Gaylord, „Accurate method to determine the eigenstates of polarization in gyrotropic media”, *Applied Optics*, vol. 28(11), str. 2075 (1989). doi: 10.1364/ao.28.002075.