Temat 6. Tensorowy opis właściwości optycznych jednorodnych ośrodków anizotropowych

6.1. Właściwości ośrodka i postać tensora (nie)przenikalności

1. Dowolny ośrodek absorbujący

Równanie fali płaskiej

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_0 \exp[\mathrm{i}\omega(t - n\,\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}/c)] \ . \qquad (5.16)$$

Zgodnie z równaniem (5.16), zmiana amplitudy fali ze wzrostem drogi $|\mathbf{r}|$ przebytej w kierunku $\mathbf{s}$ występuje jedynie w przypadku $\mathrm{Im}[n] \neq 0$.

W układzie współrzędnych *XYZ* gdzie $\mathbf{s}||Z$

$$n_{\mathrm{f,s}}^2 = \frac{2}{B_{xx} + B_{yy} \pm \sqrt{\left(B_{xx} - B_{yy}\right)^2 + 4B_{xy}B_{yx}}} \qquad (5.30)+(5.31)$$

$\mathrm{Im}[n] \neq 0$ otrzymujemy dla zespolonego tensora $\mathbf{B}$, w którym $B_{xy} \neq B_{yx}^*$ lub $\mathrm{Im}[B_{ii}] \neq 0$

Biorąc pod uwagę tensor zapisany w dowolnym układzie współrzędnych, otrzymujemy niehermitowski tensor zespolony

$$B_{ij} \neq B_{ji}^* \ . \qquad (6.1)$$

c.d. Właściwości ośrodka i postać tensora (nie)przenikalności

Kąt przekątnej fali szybszej: $$\sin\beta_\mathrm{f} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{B_{yy}-B_{xx}}{\sqrt{\left(B_{xx}-B_{yy}\right)^2+4B_{xy}B_{xy}^*}}}\,, \tag{5.40}$$

Różnica faz składowych $\mathcal{E}_x$ i $\mathcal{E}_y$: $$\sin\delta = \frac{\mathrm{Im}[B_{xy}^*]}{\left|B_{xy}\right|}, \tag{5.42}$$

2. Ośrodek nieabsorbujący eliptyczny

Ośrodek nieabsorbujący jest opisany hermitowskim tensorem nieprzenikalności:

$$B_{ij} = B_{ji}^*\,, \tag{6.2}$$

Warunek (6.2) prowadzi do dowolnych polaryzacji eliptycznych, tzn. o dowolnych β_f i δ.

3. Ośrodek nieabsorbujący liniowy

W ośrodku liniowo dwójłomnym $\delta = 0°$ lub $180°$ i wg. wzoru (5.42) $\mathrm{Im}[B_{xy}] = 0$.
Uwzględniając liniowość w dowolnym kierunku światła, a także związek (6.2) otrzymujemy:

$$B_{ij} = B_{ji} \quad \text{oraz} \quad \mathrm{Im}\left[B_{ij}\right] = 0 \;\text{ dla każdego } i, j. \tag{6.3}$$

4. Ośrodek nieabsorbujący kołowy

W ośrodku kołowo dwójłomnym $\beta_\mathrm{f} = 45°$ i $\delta = \pm 90°$; wg. (5.40) i (5.42) $B_{xx} = B_{yy}$ i $\mathrm{Re}[B_{xy}] = 0$.
Uwzględniając kołowość w dowolnym kierunku światła, a także związek (6.2) otrzymujemy:

$$B_{ij} = -B_{ji} \;\text{ dla każdego } i, j \quad \text{oraz} \quad \mathrm{Im}\left[B_{ji}\right] \neq 0 \text{ dla } i \neq j, \tag{6.4}$$

$$B_{11} = B_{22} = B_{33} \quad \text{oraz} \quad \mathrm{Re}\left[B_{ji}\right] = 0 \text{ dla } i \neq j. \tag{6.5}$$

c.d. Właściwości ośrodka i postać tensora (nie)przenikalności

Podsumowanie:

Tensorem nieprzenikalności dla częstotliwości optycznych można opisać:

- *dwójłomność liniowa*– symetryczna część rzeczywista $[B_{ij}]$,
- *dwójłomność kołowa* – antysymetryczna część urojona $[B_{ij}]$,
- *absorpcja, dichroizm* – niehermitowska część $[B_{ij}]$.

Wszystkie wyżej wymienione efekty można podzielić na:

- *efekty naturalne* – opisane tensorem $[B_{ij}]$ przy braku zewnętrznych zaburzeń,
- *efekty indukowane* – opisane zmianami $[B_{ij}]$ z powodu zewnętrznej przyczyny, np.:
  - *efekt piezooptyczny* – spowodowany przez naprężenie,
  - *efekt elastooptyczny* – odkształcenie,
  - *efekty elektrooptyczne, indukowana aktywność optyczna, elektroapsorbcja* – pole elektryczne.

6.2. Efekty elektrooptyczne

Efekty elektrooptyczne polegają na zmianie rzeczywistej części współczynników załamania światła pod wpływem przyłożonego pola elektrycznego.

Efekt Kerra, został odkryty w ośrodkach izotropowych, które pod wpływem przyłożonego pola stają się ośrodkami liniowo dwójłomnymi jednoosiowymi, tzn. tensor nieprzenikalności zapisany w układzie jego osi głównych *xyz*, gdzie $z||\mathbf{E}$, przyjmuje postać

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} n_{\mathrm{o}}^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & n_{\mathrm{o}}^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & n_{\mathrm{e}}^{-2} \end{bmatrix}, \tag{6.6}$$

gdzie:

- n_{o} - współczynnika załamania promienia zwyczajnego (*ang. ordinary*),
- n_{e} - współczynnika załamania promienia nadzwyczajnego (*ang. extraordinary*).

Tradycyjnie efekt Kerra opisuje się wzorem [a]:

$$\Delta n = \lambda\, K\, E^2, \tag{6.7}$$

gdzie:

$\Delta n = n_{\mathrm{e}} - n_{\mathrm{o}}$ – dwójłomność,
λ – długość fali świetlnej,
K – stała Kerra,
E – pole elektryczne stałe lub małej częstotliwości przyłożone prostopadle do kierunku światła.

W zależności od ośrodka stała Kerra może przyjmować wartości dodatnie i ujemne.

c.d. Efekty elektrooptyczne

Do tensorowego opisu efektów elektrooptycznych w dowolnych ośrodkach wykorzystuje się rozwinięcie w szereg potęgowy [6,a]:

$$\mathrm{Re}\left[B_{ij}\right] = \delta_{ij} n_{0i}^{-2} + r_{ijk} E_k + q_{ijkl} E_k E_l + \cdots \ , \tag{6.8}$$

gdzie:

B_{ij} – składowe tensora nieprzenikalności,

δ_{ij} – delta Kroneckera,

n_{0i} – główne współczynniki załamania światła przy braku pola E,

r_{ijk} – wsp. liniowego efektu elektrooptycznego (Pockelsa) [mV^{-1}],

q_{ijkl} – wsp. kwadratowego efektu elektrooptycznego (Kerra) [$\mathrm{m}^2\mathrm{V}^{-2}$],

… – wyrazy opisujące efekty wyższych rzędów.

Ponieważ część rzeczywista tensora **B** jest symetryczna i kolejność mnożenia przez składowe E_k, E_l nie ma znaczenia

$$r_{ijk} = r_{jik} \ \text{symetria } [\mathrm{V}^2]\mathrm{V}; \quad q_{ijkl} = q_{jikl} = q_{jilk} \ \text{symetria} [\mathrm{V}^2]^2. \tag{6.9}$$

W literaturze często stosowana jest skrócona forma zapisu indeksów [6,a]

$$\mathrm{Re}[\Delta B_i] = r_{ik} E_k + q_{il} E_l^2 + \cdots \ , \quad i, l = 1, 2, \dots, 6, \tag{6.10}$$

gdzie zastępowanie par indeksów przez pojedynczy indeks odbywa się wg reguły

$$xx \to 1, yy \to 2, zz \to 3, yz \to 4, xz \to 5, xy \to 6. \tag{6.11}$$

Przykład 6.1 – opis efektu Kerra

Przeanalizujmy związki pomiędzy opisem tensorowym (6.8) i skalarnym (6.7) na przykładzie ośrodka izotropowego o symetrii $\infty\infty m$, dla którego:

$B_{ij}\,(E=0)$	r_{ij}	q_{ij}
$\begin{bmatrix} n_0^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & n_0^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & n_0^{-2} \end{bmatrix},$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$	$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ q_{12} & q_{11} & q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ q_{12} & q_{12} & q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix},$ $\times = 2(q_{11} - q_{12})$.

(6.12)

W układzie współrzędnych XYZ, w którym $\mathbf{s}||Z$, a pole elektryczne $\mathbf{E} = [E, 0, 0]$, podstawienie tensorów (6.12) do wzoru (6.8) prowadzi do:

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{22} \\ B_{33} \\ B_{23} \\ B_{13} \\ B_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_0^{-2} + q_{11}E^2 \\ n_0^{-2} + q_{12}E^2 \\ n_0^{-2} + q_{12}E^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6.13}$$

c.d. Przykład 6.1 – opis efektu Kerra

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{22} \\ B_{33} \\ B_{23} \\ B_{13} \\ B_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_0^{-2} + q_{11}E^2 \\ n_0^{-2} + q_{12}E^2 \\ n_0^{-2} + q_{12}E^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6.13}$$

Stąd i ze wzorów (5.30) i (5.31) otrzymujemy współczynniki załamania światła:

$$n_\mathrm{f} = \frac{1}{\sqrt{n_0^{-2} + \frac{1}{2}(q_{11} + q_{12} + |q_{11} - q_{12}|)E^2}} \approx n_0 - \frac{1}{4} n_0^3 (q_{11} + q_{12} + |q_{11} - q_{12}|)E^2, \tag{6.14}$$

$$n_\mathrm{s} = \frac{1}{\sqrt{n_0^{-2} + \frac{1}{2}(q_{11} + q_{12} - |q_{11} - q_{12}|)E^2}} \approx n_0 + \frac{1}{4} n_0^3 (q_{11} + q_{12} - |q_{11} - q_{12}|)E^2, \tag{6.15}$$

co daje moduł dwójłomności

$$|\Delta n| = n_\mathrm{s} - n_\mathrm{f} = \frac{1}{2} n_0^3 |q_{11} - q_{12}| E^2. \tag{6.16}$$

$$\Delta n = \lambda\, K\, E^2 \tag{6.7}$$

Podstawiając wzór (6.16) do (6.7) otrzymujemy

$$|K| = \frac{n_0^3}{2\lambda} |q_{11} - q_{12}|. \tag{6.17}$$

c.d. Przykład 6.1 – opis efektu Kerra

o – ordinary

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} n_o^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & n_o^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & n_e^{-2} \end{bmatrix}, \qquad (6.6)$$

współrzędne xyz, gdzie $z||\mathbf{E}$

0 – dla $E = 0$

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{22} \\ B_{33} \\ B_{23} \\ B_{13} \\ B_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_0^{-2} + q_{11}E^2 \\ n_0^{-2} + q_{12}E^2 \\ n_0^{-2} + q_{12}E^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (6.13)$$

współrzędne XYZ, gdzie $X||\mathbf{E}$

$$|K| = \frac{n_0^3}{2\lambda}|q_{11} - q_{12}|. \qquad (6.17)$$

Tensory (6.6) i (6.13) są zapisane w różnych układach współrzędnych, które są obrócone względem siebie o kąt 90° wokół osi Y. Biorą to pod uwagę można znaleźć, że

$$n_e^{-2} = n_0^{-2} + q_{11}E^2, \quad n_o^{-2} = n_0^{-2} + q_{12}E^2. \qquad (6.18)$$

Stąd, znak dwójłomności $\Delta n = n_e - n_o$ pokrywa się ze znakiem różnicy $q_{12} - q_{11}$ i ostatecznie

$$K = -\frac{n_0^3}{2\lambda}(q_{11} - q_{12}). \qquad (6.19)$$

6.3. Efekty opisane antysymetryczną urojoną częścią tensora nieprzenikalności

Rozważmy jednorodny nieabsorbujący ośrodek aktywny optycznie. Pole elektryczne fali świetlnej **Ɛ** powoduje wzbudzenie indukcji elektrycznej **D**

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}\, \boldsymbol{\mathcal{E}} = \varepsilon_0 \{\mathrm{Re}[\boldsymbol{\varepsilon}] + \mathrm{i}[\mathbf{G}]\}\boldsymbol{\mathcal{E}}\,. \tag{6.20}$$

Ponieważ tensor [**ε**] jest zespolony i hermitowski, jego antysymetryczna część urojona [**G**] zawiera trzy składowe niezależne i iloczyn [**G**]**Ɛ** można zastąpić przez iloczyn wektorów [a]

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \{\mathrm{Re}[\boldsymbol{\varepsilon}]\mathcal{E} + \mathrm{i}\mathbf{G} \times \boldsymbol{\mathcal{E}}\}, \tag{6.21}$$

gdzie *wektor skręcenia* **G** = [G_x, G_y, G_z] jest złożony ze składowych tensora [**G**]

$$[\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 0 & -G_Z & G_y \\ G_Z & 0 & -G_X \\ -G_y & G_X & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.22}$$

Wektor skręcenia **G** zależy od kierunku **s** propagacji fali świetlnej w ośrodku [a,b]

$$\mathbf{G} = [\mathbf{g}]\mathbf{s}\,, \tag{6.23}$$

gdzie [**g**] jest symetrycznym rzeczywistym pseudotensorem drugiej rangi, nazywanym *tensorem skręcenia* (*ang. gyration tensor*).

c.d. Efekty opisane antysymetryczną urojoną częścią tensora nieprzenikalności

Gdy zewnętrzne pole elektryczne **E** stałe lub o małej częstotliwości zostanie przyłożone do ośrodka, tensor skręcenia [**g**] można wyrazić następującym szeregiem [a]:

$$g_{ij} = g_{ij}^{(0)} + \gamma_{ijk} E_k + \beta_{ijkl} E_k E_l + \cdots \, , \tag{6.24}$$

gdzie:

$g_{ij}^{(0)}$ - składowe pseudotensora naturalnej aktywności optycznej (*ang. natural gyration tensor*),

γ_{ijk} - składowe pseudotensora liniowej indukowanej aktywności optycznej (*ang. linear electrogyration tensor*),

β_{ijkl} - składowe pseudotensora kwadratowej indukowanej aktywności optycznej.

Wymienione wyżej wielkości są pseudotensorami o symetriach wewnętrznych odpowiednio $\varepsilon[V^2]$, $(\varepsilon[V^2])V$, $(\varepsilon[V^2])[V^2]$.

Znajomość tensora skręcenia [**g**], a co za tym idzie wektora skręcenia **G** dla danego **s**, pozwala na wyznaczenie antysymetrycznej urojonej części tensora nieprzenikalności [**B**] według wzoru [c]

$$\mathrm{Im}[\mathbf{B}] = -\mathrm{Re}[\mathbf{B}][\mathbf{G}]\mathrm{Re}[\mathbf{B}]. \tag{6.25}$$

Przykład 6.2 – naturalna aktywność optyczna

W ośrodkach izotropowych o symetrii $\infty\infty m$ wszystkie składowe tensora $[\mathbf{g^{(0)}}]$ ulegają wyzerowaniu i aktywność optyczna nie może wystąpić. Przeanalizujmy ośrodek izotropowy o symetrii $\infty\infty$, dla której tensory mają postać [a]: :

Naturalna aktywność optyczna $g_{ij}^{(0)}$	Naturalna dwójłomność liniowa $\mathrm{Re}\left[B_{ij}^{(0)}\right]$
$\begin{bmatrix} g_{11}^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & g_{11}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & g_{11}^{(0)} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n_0^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & n_0^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & n_0^{-2} \end{bmatrix}$

Postać podanych tensorów jest taka sama w każdym układzie współrzędnych. Wybierzmy układ, w którym światło rozchodzi się wzdłuż osi Z, czyli $\mathbf{s}$ = [0, 0, 1]. Ze wzoru (6.23) otrzymujemy wektor skręcenia

$$\mathbf{G} = [\mathbf{g}]s = \begin{bmatrix} g_{11}^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & g_{11}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & g_{11}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_{11}^{(0)} \end{bmatrix}. \tag{6.26}$$

Stąd i ze wzoru (6.25)

$$[\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 0 & -G_z & G_y \\ G_z & 0 & -G_x \\ -G_y & G_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -g_{11}^{(0)} & 0 \\ g_{11}^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.27}$$

c.d. Przykład 6.2 – naturalna aktywność optyczna

Podstawiając $[\mathbf{G}]$ (6.27) do (6.25) otrzymujemy antysymetryczną część urojoną tensora $[\mathbf{B}]$

$$\mathrm{Im}[\mathbf{B}] = -\begin{bmatrix} n_0^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & n_0^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & n_0^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -g_{11}^{(0)} & 0 \\ g_{11}^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_0^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & n_0^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & n_0^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n_0^{-4} g_{11}^{(0)} & 0 \\ -n_0^{-4} g_{11}^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.28}$$

i po połączeniu części rzeczywistej z częścią urojoną

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} n_0^{-2} & \mathrm{i} n_0^{-4} g_{11}^{(0)} & 0 \\ -\mathrm{i} n_0^{-4} g_{11}^{(0)} & n_0^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & n_0^{-2} \end{bmatrix}. \tag{6.29}$$

Podstawiając składowe tensora (6.29) do wzorów (5.40)-(5.43) otrzymujemy:

Kąt przekątnej fali szybszej i wolniejszej:

$$\beta_\mathrm{f} = \beta_\mathrm{s} = 45° \tag{6.30}$$

Różnice faz składowej *x* do *y* w fali szybszej i wolniejszej:

$$\delta_\mathrm{f} = -\delta_\mathrm{s} = \begin{cases} +90°, & \text{dla } g_{11}^{(0)} < 0, \\ -90°, & \text{dla } g_{11}^{(0)} > 0. \end{cases} \tag{6.31}$$

Dowód występowania efektu skręcenia płaszczyzny polaryzacji światła w ośrodku opisanym tensorem (6.29) będzie podany dalej po wprowadzeniu rachunku Jonesa.

Problem 3 do przećwiczenia

Wykorzystują definicję tensora nieprzenikalności $[\mathbf{B}] = [\boldsymbol{\varepsilon}]^{-1}$ wyprowadzić związek:

$$\mathrm{Im}[\mathbf{B}] = -\mathrm{Re}[\mathbf{B}][\mathbf{G}]\mathrm{Re}[\mathbf{B}]. \tag{6.25}$$

Czy związek (6.25) jest dokładny?

Jeżeli (6.25) nie jest dokładnym związkiem, to czy przybliżenie można uznać za uzasadnione w typowym przypadku, gdy składowe tensora naturalnej aktywności optycznej $g_{ij}^{(0)}$ są mniejsze o kilka rzędów wielkości od współczynników załamania światła?

Literatura do tematu 6

[6] F. Ratajczyk, „*Dwójłomność i polaryzacja optyczna*", Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2000.

Literatura specjalistyczna w języku angielskim do rozdziałów 6.2 i 6.3:

[a] Y.I. Sirotin, M.P. Shaskolskaya, „*Fundamentals of crystal physics*". Moskwa: Mir Publishers (1982).

[b] H.G. Tompkins, E.A. Irene, „*Handbook of ellipsometry*". Norwich: William Andrew (2005).

[c] T.A. Maldonado, T.K. Gaylord, „Accurate method to determine the eigenstates of polarization in gyrotropic media", *Applied Optics*, vol. 28(11), str. 2075 (1989). doi: 10.1364/ao.28.002075.